

現代应用数学丛书

线性规划

〔日〕森口繁一 宫下藤太郎著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

綫性规划

〔日〕 森口繁一 著
 宫下藤太郎

刘源 張 譯
許国 志 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。以经济问题为例,介绍了有关线性规划的理论和应用。全书分三章:第1章介绍单纯形法的原理;第2章进一步讨论修订单纯形法及对偶问题等;第3章着重介绍线性规划的应用。

本书可供大学数学系、财经方面有关专业师生以及经济工作中的有关人员参考。

现代应用数学丛书

线 性 规 划

原 书 名 线 型 计 划 法

原 著 者 (日) 森 口 繁 一
宫 下 藤 太 郎

原出版者 岩 波 书 店

译 者 刘 源 强

校 者 许 国 志

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出 098 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

*

开本 870×1168 1/32 印张 2 16/32 字数 57,000

1983 年 4 月第 1 版 1983 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—9,000

统一书号: 13119 · 502

定 价: (十四) 0.46 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册,分成A、B两组,各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并,整理成42种,不另分組編号,陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广,其内容都和現代科学技术密切相关,有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富,而叙述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要内容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻譯出版这一套书,对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陸續出版的,写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理,为了尽可能地减少这种影响,我們在每一譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最新发展状况,并对全书内容作一些評價,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志,为提高书籍的质量付出了巨大劳动,在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书 名	原 作 者	譯 者	书 名	原 作 者	譯 者
代 数 学*	弥永昌吉等	熊全淹	非綫性振动論*	古 屋 茂	呂紹明
几 何 学*	矢野健太郎	孙澤瀛	力 学 系 与 映 射 理 論*	岩 田 义 一	孙澤瀛
复 变 函 数	功力金二郎	刘书琴	平 面 彈 性 論*	森 口 繁 一	刘亦珩
集 合 · 拓 扑 · 測 度*	河 田 敬 义	賴英华	有 限 变 位 彈 性 論*	山 本 善 之 夫	刘亦珩
泛 函 分 析*	吉 田 耕 作	程其襄	变 形 几 何 学	近 藤 一 夫	刘亦珩
广 义 函 数*	岩 村 联	楊永芳	型 性 論*	鷲 津 文 一 郎	刘亦珩
常 微 分 方 程*	福原滿洲雄	張庆芳	粘 性 流 体 理 論*	谷 一 郎	刘亦珩
偏 微 分 方 程*	南 云 道 夫	錢端仕	可 压 縮 流 体 理 論*	河 村 龙 馬	刘亦珩
特 殊 函 数*	小谷正雄等	錢端仕	网 絡 理 論	喜安善市等	賈奔臂
差 分 方 程*	福 田 武 雄	穆鴻基	自 动 控 制 理 論*	喜安善市等	程立林
富里哀变换与拉普拉斯变换	河 田 龙 夫	錢端仕	回 路 拓 扑 学	近 藤 一 夫	張鳴鏞
变分法及其应用*	加 藤 敏 夫	周怀生	信 息 論*	喜安善市等	李文清
李 群 論*	岩 堀 长 庚	孙澤瀛	推 断 統 計 理 論	北 川 敏 男	李賢平
随 机 过 程*	伊 藤 清	刘璋温	統 計 分 析*	森 口 繁 一	刘璋温
回 轉 群 与 对 称 群 的 应 用*	山内恭彦等	張质賢	試 驗 設 計 法	增 山 元 三 郎	刘璋温
結 晶 統 計 与 代 数*	伏 見 康 治	孙澤瀛	群 体 遺 傳 学 的 数 学 理 論*	木 村 資 生	刘祖洞
偏 微 分 方 程 的 应 用	犬 井 鉄 郎 等	楊永芳	博 奕 論	官 澤 光 一	張毓春
微 分 方 程 的 解 法	加 藤 敏 夫 等	王占瀛	綫 性 規 划	森 口 繁 一	刘源張
近 似 解 法			經 济 理 論 中 的 数 学 方 法	安 井 琢 磨 等	談祥柏
数 值 計 算 法	森 口 繁 一 等	雷昌齡	随 机 过 程 的 应 用*	河 田 龙 夫	刘璋温
量 子 力 学 中 的 数 学 方 法	朝 永 振 一 郎	周民强	計 算 技 术	高 桥 秀 俊	姚 晋
工 程 力 学 系 統*	近 藤 一 夫 等	刘亦珩	穿 孔 卡 計 算 机	森 口 繁 一	刘源張

注：有 * 者已在 1962 年出版。

目 录

出版說明

第1章 单纯形法	1
§ 1 綫性规划問題与图解法	1
§ 2 代数解法	4
§ 3 单纯形法的原理	7
§ 4 罰款 M 的利用	17
第2章 綫性关系的保存性	22
§ 5 修訂单纯形法	22
§ 6 对偶問題	28
§ 7 問題的修正	33
第3章 綫性规划的应用	41
§ 8 运输問題	41
§ 9 有不确定需要的生产运输规划	46
§ 10 博弈論与綫性规划	52
§ 11 利用最大最小原則的生产规划	59
§ 12 产业关連规划模型	61
后記	71
参考文献	72
校后記	74

第1章 單純形法

§ 1 线性规划问题与图解法

綫性规划 (Linear Programming = LP) 的典型問題可以写为下列的形式:

标准型线性规划问题 在约束条件

[illegible]

与 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ (1.2)

下,决定使

$$f(x_1, \dots, x_n) = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n \quad (1.3)$$

为最大的 x_1, x_2, \dots, x_n .

这里 (1.1) 中的系数 a_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$), 右边的 s_i ($i=1, \dots, m$) 与 (1.3) 中的系数 v_j ($j=1, \dots, n$) 都是给定的常数, 并且 a_{ij}, v_j 可以是任意的实数, 但 s_i 必须是正的。

例 10 某一企业要制造两种产品 A, B 。制造 1 公斤的产品 A 需要煤炭 9 吨, 电力 4 瓩小时, 劳动量 3 人日。制造 1 公斤的产品 B 需要煤炭 4 吨, 电力 5 瓩小时, 劳动量 10 人日。但是这个企业能够使用的只有煤炭 360 吨, 电力 200 瓩小时, 劳动量 300 人日, 超过这些就不能用。产品 A 每 1 公斤有 7 万元的利润, 产品 B 每 1 公斤有 12 万元的利润。在上述对于煤炭、电力、劳力的限制下, 希

① 这是资本主义制度下的情况。在社会主义制度下,首先应该根据国家计划来考虑生产的品种及其产量。后面也有类似情况。——译者注

望在使利润最大的情况下决定产品 A 与产品 B 的产量。

问题中所给的数值可以整理成表 1.1.

表 1.1 数 据

资 源 \ 活 动	产品 A 的 生 产 (公斤)	产品 B 的 生 产 (公斤)	各种资源的利用 限 度
煤炭(吨)	9	4	360
电力(瓩小时)	4	5	200
劳动量(人日)	3	10	300
利润(万元)	7	12	—

产品 A, B 的产量分别设为 x_1 公斤, x_2 公斤, 则约束条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 &\leq 360, \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 200, \\ 3x_1 + 10x_2 &\leq 300 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$$\text{与} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \quad (1.5)$$

利润的式子成为

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 12x_2. \quad (1.6)$$

因此, 这个问题就是上面所述形式的問題。

[注] 一般以号碼 i 与资源, 号碼 j 与活动相对应。 a_{ij} 可以解释为技术系数, s_i 为资源的利用限度, v_j 为价值系数。函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 称为目标函数。

现在, 如例 1 这样简单的問題可以用图解法方便地处理(图 1.1),

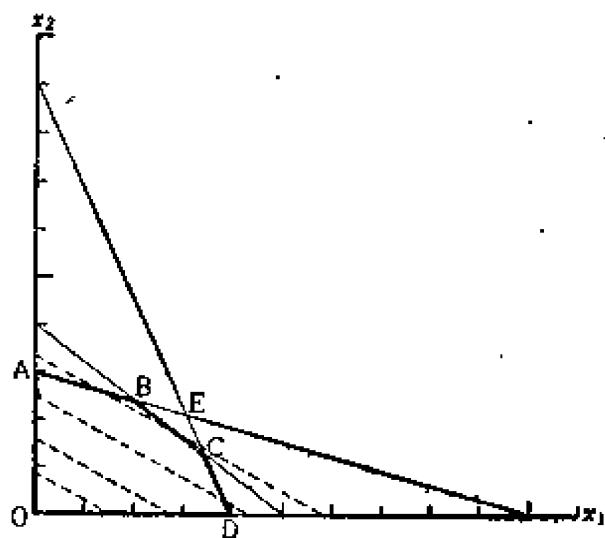


图 1.1 图 解 法

在 (x_1, x_2) 平面上, 条件(1.4)的各式, 指定点 (x_1, x_2) 各属于由某些直线为界的半平面内。条件(1.5)要求点 (x_1, x_2) 应在第一象限内。满足全部这些条件的点的集合是5边形 $OABCD$ 的周边上和内部的全体的集合。另一方面, 以 C 为参数的曲线群 $f(x_1, x_2) = C$ 是平行直线群, C 愈大直线愈在右上方(图1.1的虚线)。只须在属于这个直线群, 并且与5边形 $OABCD$ 至少共有1点的诸直线内定出 C 的值是最大的那一条。在方格纸上作图一看就容易知道它是通过 B 点的直线(对应的 C 是428)。 B 点是直线 $4x_1 + 5x_2 = 200$ 与 $3x_1 + 10x_2 = 300$ 的交点, 可知 $x_1 = 20$, $x_2 = 24$ 。所以, 这个问题的最优解定为产品 A 的产量 $x_1 = 20$ 公斤, 产品 B 的产量 $x_2 = 24$ 公斤, 这时所得的利润是 $f(20, 24) = 428$ 万元。

一般说, 在 n 维空间的点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 中, 满足条件(1.1)与(1.2)的点的全体, 组成一个由 $m+n$ 个超平面(其中, 后面的 n 个是坐标超平面)为界的 $m+n$ 个半空间的共同部分所决定的凸集 S 。(連結那样两点的线段上的任意一点, 满足所有的条件, 因而属于这个集合, 由此可知是凸集。)另一方面, $f(x_1, \dots, x_n) = C$ 的曲线群是平行超平面群。问题就是在属于这个群, 而又与上述的凸集至少共有1点的诸超平面内, 决定 C 值是最大的那一个(以及它与 S 的共同点)。

实际上, 能够利用这样的作图, 几何地求最优解的, 只限于例1那样 $n=2$ 的情况。当 $n \geq 3$ 时就必须通过计算来求最优解。即使如此, 象上面的解释在对问题的性质和解法的考察上也是有效的。

另外, 在这里引进新的变数, 而把问题改写一下。

例2 在例1中, 设煤炭、电力、劳力的使用剩余各为 λ_1 吨, λ_2 瓩小时, λ_3 人日, 则

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 360 - 9x_1 - 4x_2, \\ \lambda_2 &= 200 - 4x_1 - 5x_2, \\ \lambda_3 &= 300 - 3x_1 - 10x_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

这些都不允许是负的, 即必然是

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad (1.8)$$

这样就把不等式(1.4)改写成等式(1.7)和简单形式的不等式(1.8)。

若在(1.7)中把含有未知数的各项移至左边,并且因为(1.8)与(1.5)是同样形式,故把它们放在一起,则例1就可改为下面的形式:

在约束条件

$$\left. \begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 + \lambda_1 &= 360, \\ 4x_1 + 5x_2 + \lambda_2 &= 200, \\ 3x_1 + 10x_2 + \lambda_3 &= 300 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

与

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0 \quad (1.10)$$

下,决定使

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 12x_2 \quad (1.11)$$

为最大的 $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 。

松弛变数(slack variables) $\lambda_i (i=1, \dots, m)$ 一般定义为

$$\lambda_i = s_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \quad (i=1, \dots, m), \quad (1.12)$$

则本节开始所举的问题可改为:在约束条件

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda_i = s_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.13)$$

与

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.14)$$

下,决定使

$$f(x_1, \dots, x_n) = v_1x_1 + \dots + v_nx_n \quad (1.15)$$

为最大的 $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ 。

§2 代数解法

将尽量用普通代数的想法来说明用单纯形法解前节例2的过程(更初等的解说见文献[10])。

第1段 首先考虑图1.1中对应原点 O 的规划,即 $x_1 = x_2 = 0$ 的规划。这时, $\lambda_1 = 360, \lambda_2 = 200, \lambda_3 = 300$ 。就是说,产品 A 和产品 B 全不生产,因此所有的资源全部剩下。利润是 $f(0, 0) = 0$ 。

这个规划不用说是可以改善的。从 (1.11) 可以看出, 使 x_1 取正数或使 x_2 取正数都增加利润 f 。若只取其中之一, 则因为 x_2 的系数较大, 我们就取 x_2 。即使 x_1 仍然为 0, 考虑使 x_2 取正数的修正。

作这样的修正时, 不能随便使 x_2 增大。在 (1.7) 中使 $x_1=0$, 逐渐增大 x_2 , 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都逐渐变小。到 $x_2=300/10=30$ 时, λ_3 就变成 0 (λ_1, λ_2 还是正的)。 x_2 不允许比这再大。因此, 作为修正案, 得到

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \quad x_2 = 30, \\ \lambda_1 &= 360 - 4 \times 30 = 240, \quad \lambda_2 = 200 - 5 \times 30 = 50, \quad \lambda_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

的规划(图 1.1 的 A 点)。与此相对应的利润是

$$f(0, 30) = 12 \times 30 = 360. \quad (2.2)$$

第 2 段 为了考查 (2.1) 是否还能改善, 从方程 (1.9) 导出与此等价的下列方程式:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 7.8x_1 - 0.4\lambda_3 &= 240, \\ \lambda_2 + 2.5x_1 - 0.5\lambda_3 &= 50, \\ x_2 + 0.3x_1 + 0.1\lambda_3 &= 30. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

这只需先以 10 除 (1.9) 的第 3 式, 得 (2.3) 的第 3 式, 再从 (1.9) 的第 1 式与第 2 式中各减去它的 4 倍与 5 倍。再将 (2.3) 的第 3 式的 12 倍加到 (1.11) 的两边, 移项整理得

$$f = 360 + 3.4x_1 - 1.2\lambda_3 \quad (2.4)$$

在前段得到的无非是在 (2.3), (2.4) 中使 $x_1 = \lambda_3 = 0$ 的规划。若要对此修正, 就是将 x_1 或 λ_3 向正的方向移动。但是根据 (2.4) 知道, 移动 λ_3 反倒不上算。使 x_1 为正的修正是上算的。这样, 可以使 x_1 增加到什么地方呢? 这只要在 (2.3) 中使 $\lambda_3 = 0$, 看使 x_1 逐渐增大时变成什么样子就行。这时, $\lambda_1, \lambda_2, x_2$ 都逐渐减小, 到 $x_1 = 50/2.5 = 20$ 时, λ_2 最后成为 0。其它的两个成为 $\lambda_1 = 240 - 7.8 \times 20 = 84$, $x_2 = 30 - 0.3 \times 20 = 24$ 。利润成为

$$f = 360 + 3.4 \times 20 = 428. \quad (2.5)$$

这样就得到新的规划(图 1.1 的 B 点)

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 24, \quad \lambda_1 = 84, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad (2.6)$$

第 3 段 为了考查规划 (2.6) 是否还能改善, 从方程 (2.3) 导出与此等价的下列方程:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 - 3.12\lambda_2 + 1.16\lambda_3 &= 84, \\ x_1 + 0.40\lambda_2 - 0.20\lambda_3 &= 20, \\ x_2 - 0.12\lambda_2 + 0.16\lambda_3 &= 24. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

这只需先以 2.5 除 (2.3) 的第 2 式, 得出 (2.7) 的第 2 式, 再从 (2.3) 的第 1 式和第 3 式各减去它的 7.8 倍。再将 (2.7) 的第 2 式的 3.4 倍加到 (2.4) 的两边, 移项整理得

$$f = 428 - 1.36\lambda_2 - 0.52\lambda_3, \quad (2.8)$$

规划 (2.6) 和与此相对应的利润 (2.5) 无非是在 (2.7) 和 (2.8) 中使 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 的规划和利润。若要对此修正, 就应使 λ_2 或 λ_3 成正的, 但从 (2.8) 知道任何一方都不利 (使 λ_2 和 λ_3 都成正的修正当然不利)。

这样就证实了规划 (2.6) (图 1.1 的 B 点) 是最优。

在上面的解法里, 从方程 (1.9) 导出 (2.3), 再计算出 (2.7), 以及从 (1.11) 得 (2.4), 再求 (2.8) 的计算, 利用表 2.1 来进行是很方便的。

表 2.1 单纯形表

段	$j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5			
	$v_j \rightarrow$		0	7	12	0	0	0			
	i	v_i	变数	s	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	計	θ_i
1	3	0	λ_1	360	9	4	1	0	0	374	$360/4=90$
	4	0	λ_2	200	4	5	0	1	0	210	$200/5=40$
	5	0	λ_3	300	3	10	0	0	1	314	$300/10=30$
			$z_j - v_j$	0	-7	-12	0	0	0	-19	\rightarrow
2	3	0	λ_1	240	7.8	0	1	0	-0.4	248.4	$240/7.8=30.8$
	4	0	λ_2	50	2.5	0	0	1	-0.5	53.0	$50/2.5=20$
	2	12	x_2	30	0.3	1	0	0	0.1	31.4	$30/0.3=100$
			$z_j - v_j$	360	-3.4	0	0	0	1.2	357.8	
3	3	0	λ_1	84	0	0	1	-3.12	1.16	83.04	
	1	7	x_1	20	1	0	0	0.40	-0.20	21.20	
	2	12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	25.04	
			$z_j - v_j$	428	0	0	0	1.36	0.52	429.88	◎

在表 2.1 里, 上边有 v_j , 左边有 v_i 栏, 还在右边有計和 θ_i 栏, 此外有 $z_j - v_j$ 的注記 ◎ 的記号等。这些意思将在下节的說明中

搞清楚。

表 2.1 本体部分的计算是线性计算(各行作为一个向量处理的计算)的一种,称为迭代法(参照本丛书,森口、高田:数值计算方法^① I, § 1)。它的“枢轴件”是在表 2.1 里以用虚线包括的行和列的交点指示出来。

§ 3 单纯形法的原理

现在将前节所述的代数解法的要点概括成一般的形式。

作为准备,为了形式的整理,将原来的变数 x_1, x_2, \dots, x_n 和松弛变数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 一概用下列同类的记号

$$\left. \begin{aligned} y_1 = x_1, \dots, & \quad y_n = x_n, \\ y_{n+1} = \lambda_1, \dots, & \quad y_{n+m} = \lambda_m \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

表示。并且与此相随,将新的价值系数 v_{n+1}, \dots, v_{n+m} 都定为 0。这样, (1.13), (1.14), (1.15) 各成为

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + y_{n+i} = s_i \quad (i=1, \dots, m), \quad (3.2)$$

$$y_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n+m), \quad (3.3)$$

$$f = \sum_{j=1}^{n+m} v_j y_j. \quad (3.4)$$

从而可以说,问题是:在条件 (3.2), (3.3) 下使 (3.4) 最大。

例 1 对于上面的例子,就是

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \lambda_1, \quad y_4 = \lambda_2, \quad y_5 = \lambda_3, \quad (3.5)$$

$$v_1 = 7, \quad v_2 = 12, \quad v_3 = 0, \quad v_4 = 0, \quad v_5 = 0, \quad (3.6)$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

单纯形法是从 (3.2) 出发,依次进行“迭代”的计算。这样得到

^① 即本丛书中,岡昌齡译《数值计算方法》。——译者注

的(与原来等价的)方程一般可写作如下的形式:

$$y_i + \sum_{k \in K} b_{ik} y_k = b_{i0} \quad (i \in B), \quad (3.8)$$

此处 B 和 K 都是号码的集合。 B 含有 m 个, K 含有 n 个, 彼此没有共同的号码, 双方相加恰是 $\{1, 2, \dots, n+m\}$, 即

$$B + K = \{1, 2, \dots, n+m\}. \quad (3.9)$$

例2 参照记号(3.5); 在(2.3)就是

$$B = \{3, 4, 2\}, \quad K = \{1, 5\},$$

在(2.7)就是

$$B = \{3, 1, 2\}, \quad K = \{4, 5\}.$$

[注] (3.8)可以说是对(3.2)中具有属于 B 的号码的变数 $y_i (i \in B)$ 求解所得的。就是说(3.8)是将特定的 m 个变数 $y_i (i \in B)$ 以其余的 n 个变数 $y_k (k \in K)$ 表示的式子。

除(3.8)中所含 b_{i0}, b_{ik} 之外, 当 $i=j$ 时将 $b_{ij} (i, j \in B)$ 定为 1, 当 $i \neq j$ 时定为 0, 则(3.8)也可写为

$$\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij} y_j = b_{i0} \quad (i \in B). \quad (3.10)$$

(3.10) 的系数的行列记入在单纯形表的本体部分里。(属于 B 的号码的列是单位向量, 唯一不是 0 的分量 1 可在具有对应的号码的变数的行里找到。)

[注] m 个变数 $y_i (i \in B)$ 称为表中的“基底变数 (basic variables)”。

将前节的计算程序作成一般的框图(flow chart), 如图 3.1.

现在, 一般地稍微详细考查一下这个程序的各个步骤。

从考查一个给出的表所表示的规划开始。(作为具体的例子, 请参照表 2.1 的第 2 段或第 3 段。)就图 3.1, 从②开始说起。

一般说, 一个表是如上面说过的表示 (3.8) 那样的一组方程, 这里特别使 $y_k = 0 (k \in K)$, 则得 $y_i = b_{i0} (i \in B)$. 若

$$b_{i0} \geq 0 \quad (i \in B), \quad (3.11)$$

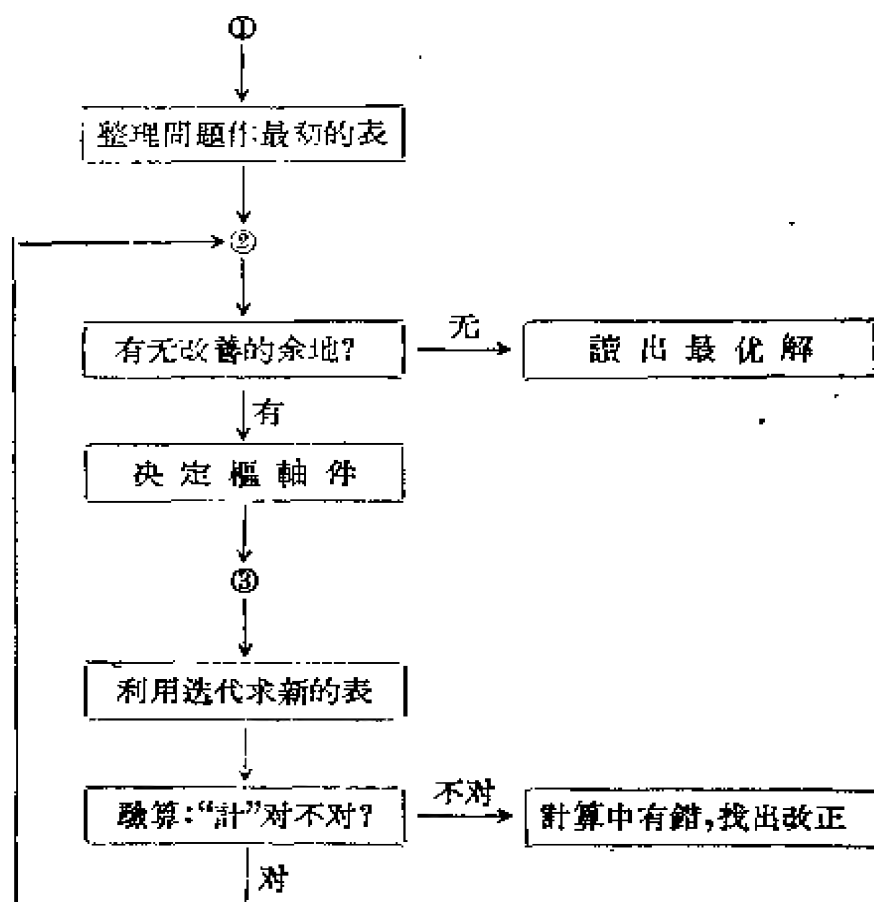


图 3.1 单纯形計算的一般程序

这便是确实可以容許的——可能实行的 (feasible) ——规划。为了简单起见, 条件 (3.11) 成立的表称为 **S 型** (取 simplex 的头一个字母)。S 型的表表示一个可行解

$$y_i = b_{i0} \quad (i \in B), \quad y_k = 0 \quad (k \in K), \quad (3.12)$$

这就称为那个表的“基底解 (basic solution)”。

为了考查基底解 (3.12) 是否有改善的余地, 必须求得将利润表示为 $y_k (k \in K)$ 的函数的式子。这只要在 (3.4) 右边的 y_i 当中, 对基底变数 $y_i (i \in B)$ 代入从 (3.8) 求得的式子, 对其他的变数 $y_k (k \in K)$ 仍然不动, 加以整理就行。这样就成为

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i \in B} v_i (b_{i0} - \sum_{k \in K} b_{ik} y_k) + \sum_{k \in K} v_k y_k \\ &= \sum_{i \in B} v_i b_{i0} - \sum_{k \in K} (\sum_{i \in B} v_i b_{ik} - v_k) y_k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

一般定义

$$z_j = \sum_{i \in B} v_i b_{ij} \quad (j = 0, 1, \dots, m+n), \quad (3.14)$$

则(3.13)可写为

$$f = z_0 - \sum_{k \in K} (z_k - v_k) y_k. \quad (3.15)$$

对于基底解(3.12)的利润等于 z_0 . [因为对于 $i, j \in B$ 的 b_{ij} 只在 $i=j$ 时是 1, 其他时是 0, 所以 $z_j = v_j (j \in B)$. 因此, $j \in B$ 时的 $z_j - v_j$ 一定是 0. 若再定义 $v_0 = 0$, 则 $z_0 - v_0$ 与 z_0 相同。]

在基底解(3.12)中, 所有的 $y_k (k \in K)$ 都作为 0. 对于它的修正案是以使 $y_k (k \in K)$ 当中一个以上成为正的形式出现。至于它是否有利, 决定于(3.15)中的系数 $(z_k - v_k)$ 的符号。若

$$z_k - v_k \geq 0 \quad (\text{对所有的 } k \in K), \quad (3.16)$$

则利润不会超过 z_0 (根据(3.3), y_k 决不会是负的)。就是说基底解(3.12)是最优。

[注] 若对所有的 $k \in K, z_k - v_k > 0$, 最优规划只有(3.12). 这是因为在其他的规划中, $y_k (k \in K)$ 当中有一个以上是正的, 利润就一定比 z_0 小的原故。

若(3.16)成立, 对某一 $k \in K, z_k - v_k = 0$, 进行使对应的 y_k 成为正的修正, 利润也不会发生变化。在这种情况下, 也存在(3.12)以外的最优解。

假若判别条件(3.16)不成立, 即对某一个 $k \in K, z_k - v_k < 0$, 则进行使对应的 y_k 成为正的修正, 利润将较 z_0 为大。就是说规划(3.11)还有改善的余地。对于这时的改善方法再来加以详细的考查。

记使 $z_k - v_k < 0$ 这样的一个 k 为 k^* . [当有许多这样的 k 的时候, 使其中的任何一个为 k^* , 都能得到改善。普通将其中使 $|z_k - v_k|$ 最大的——负得最多的 (most negative) ——记为 k^* .] 若对于 k^* 以外的 $k \in K$, 仍使 $y_k = 0$ 而只使 y_{k^*} 成为正的 (其值写作 θ), 则修正案从(3.8)成为

$$\left. \begin{aligned} y_i &= b_{i0} - b_{ik^*} \theta \quad (i \in B), \\ y_{k^*} &= \theta, \\ y_k &= 0 \quad (k \neq k^*, k \in K). \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

而且,对于它,目标函数是

$$f = z_0 - (z_{k^*} - v_{k^*}) \theta. \quad (3.18)$$

因为在(3.18)中, $z_{k^*} - v_{k^*} < 0$, 所以 θ 愈大则 f 愈大, 从这一点说最好尽量使 θ 取大值。但是, 一般 θ 不能随便增大。因为若增大了 θ 而使(3.17)变成不能容许的就不行了。就是说, 在(3.17)满足条件(3.3)的范围内可以使 θ 增大。(3.17)第一式最初的 m 个可能为负。不过, 其中 $b_{ik^*} \leq 0$ 的不会成负的 (θ 增大, y_i 也不会减小, 所以不用担心它成为负的)。因此, 只有对 $i \in B$, $b_{ik^*} > 0$ 的才要担心。在 θ 等于

$$\theta_i = b_{i0}/b_{ik^*} \quad (3.19)$$

的时候, 那个 y_i 成为 0。 θ 超过 θ_i , 则 y_i 成为负的, (3.17) 成为不能容许的规划。因此, θ 一定要小于 θ_i 。对于 $b_{ik^*} > 0$ 的所有的 $i \in B$, 若 $\theta \leq \theta_i$, 则 (3.17) 给出可以容许的规划。在这样的限制下, 若要尽量使 θ 取大值, 可以取等于诸 θ_i 中的最小值,

$$\theta = \min \{b_{i0}/b_{ik^*} : i \in B, b_{ik^*} > 0\}. \quad (3.20)$$

例 3 表 2.1 的第 2 段中, 只是对于 $k=1$ (y_1 即 x_1 的列), $z_k - v_k < 0$, 这样, 使 $k^*=1$ (这一列在表 2.1 中, 夹在虚线里面)。这时, $B = \{3, 4, 2\}$, 因为 b_{ik^*} 都是正的, 计算得

$$\left. \begin{aligned} \theta_3 &= b_{30}/b_{31} = 240/7.8 = 30.8, \\ \theta_4 &= b_{40}/b_{41} = 50/2.5 = 20, \\ \theta_2 &= b_{20}/b_{21} = 30/0.3 = 100. \end{aligned} \right\}$$

取其最小值 $\theta_4 = 20$ (在表 2.1 中, 这个计算记在右方的边上。 y_1 (即 x_1) 在修正案中使为 20)。

[注] 若在 $i \in B$ 当中, 没有 $b_{ik^*} > 0$ 的 i , 即对所有的 $i \in B$ 都有 $b_{ik^*} \leq 0$, 则 θ 可为任意大, 随之 f 可任意增大。这时解是“无限大”。

由(3.20)所定的 θ 应等于某一个 θ_i (记为 θ_{i^*})^①. 这样, 对应它的变数 y_{i^*} 在修正案中成为0(因 $y_{i^*} = b_{i^*,0} - b_{i^*,k^*}\theta$). 因此, 从基底变数 $y_i (i \in B)$ 当中, y_{i^*} 出去, y_{k^*} 进来. 对集合 B 和 K 说, 在修正案中与这些对应的新的集合 B' 和 K' 就是

$$\left. \begin{aligned} B' &= B - \{i^*\} + \{k^*\}, \\ K' &= K + \{i^*\} - \{k^*\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

这样决定枢轴件 b_{i^*,k^*} , 就到达了图3.1的③.

从③开始的运算是以元素 b_{i^*,k^*} 为枢轴(pivot)的迭代(sweep out)计算. 由此, k^* 的列变为单位向量(原来的 i^* 的行的元素现在成为1, 并且那一行新指定为 k^* 的行). 另一方面, 过去是单位向量的 i^* 列现在不是了.

例4 在表2.1中, 从第2段转移到第3段的计算, 是以第2段中的 $b_{41}=2.5$ (λ_2 的行, x_1 的列的元素)为枢轴的迭代.

[注] 在表2.1的第2段中, λ_2 的行和 x_1 的列是用虚线夹在里面的. 一般在表里将 i^* 的行 k^* 的列用虚线(实际计算时用铅笔线)夹起来会很方便.

将迭代的计算写为一般的形式, 新表的元素记为 b'_{ij} , 则成

$$b'_{k^*,j} = b_{i^*,j} / b_{i^*,k^*} \quad (j=0, 1, \dots, m+n, \text{计}), \quad (3.22)$$

$$b'_{ij} = b_{ij} - b_{i^*,k^*} b'_{k^*,j} \quad (i \in B - \{i^*\}; j=0, 1, \dots, m+n, \text{计}). \quad (3.23)$$

再者, 关于(3.15)中的系数 $(z_j - v_j)$ ($j=0, \dots, m+n$)也不用由(3.14)一个一个计算, 随迭代同时, 对新表的值 $(z_j - v_j)'$ 可以计算如

$$(z_j - v_j)' = (z_j - v_j) - (z_{k^*} - v_{k^*}) b'_{k^*,j} \quad (j=0, \dots, m+n, \text{计}). \quad (3.24)$$

(这和(3.23)完全是相同的形式, 因此, 当作表中多加 $z_j - v_j \equiv b_{0j}$

① 在 $\theta = \theta_i$ 的 i 有两个以上的时候发生退化. 这时, 普通以其中的任一个作 i^* 都行, 但是在特别的情况下不行. 关于这一点请参照本节末的补注.

的一行,而对于 $i = 0$ (3.23) 也成立, 进行处理就可以。)

[(3.24) 的证明]

$$\begin{aligned}
 \text{右边} &= \left(\sum_{i \in B} v_i b_{ij} - v_j \right) - \left(\sum_{i \in B} v_i b_{ik^*} - v_{k^*} \right) b'_{k^*j} \\
 &= \sum_{i \in B} v_i (b_{ij} - b_{ik^*} b'_{k^*j}) + v_{k^*} b'_{k^*j} - v_j \\
 &= \sum_{i \in B - \{i^*\}} v_i b'_{ij} + v_{k^*} b'_{k^*j} - v_j \\
 &= \sum_{i \in B'} v_i b'_{ij} - v_j = z'_j - v_j \\
 &= (z_j - v_j)' .
 \end{aligned}$$

証毕

当迭代计算完成后, 可以利用行计进行验算。对于新表(在舍入误差的范围内)看

$$b_{i\#} = b_{i0} + b_{i1} + \cdots + b_{i,n+m} \quad (i \in B \text{ 和 } i=0) \quad (3.25)$$

是否成立。(容易证明对这一个表若成立, 同样的关系对下一个表也成立。) 验算结束后, 回到新的表②。

[注] 上面所说的利用行计的验算是线性计算的常识。手算或机械计算中都最好进行这种验算。此外, 也可利用列计进行验算。为此添加新的一行 $b_{.j}$ ($j=0, \dots, n+m$) (b_{0j} 是 $z_j - v_j$) 如下:

$$\sum_{i \in B} b_{ij} + b_{0j} + b_{.j} = 1 \quad (j=0, 1, \dots, n+m). \quad (3.26)$$

并且同 b_{0j} 一样在 $b_{.j}$ 也适用与 (3.23) 同样的形式

$$b'_{.j} = b_{.j} - b_{.k^*} b'_{k^*j}. \quad (3.27)$$

这样, 用 (3.22), (3.23), (3.24) 和 (3.27) 计算新表的列的合计是

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i \in B'} b'_{ij} + b'_{0j} + b'_{.j} \\
 &= \sum_{i \in B - \{i^*\}} (b_{ij} - b_{ik^*} b'_{k^*j}) + b'_{k^*j} \\
 &\quad + (b_{0j} - b_{0k^*} b'_{k^*j}) + (b_{.j} - b_{.k^*} b'_{k^*j}) \\
 &= \left\{ \sum_{i \in B - \{i^*\}} b_{ij} + b_{0j} + b_{.j} \right\} + b'_{k^*j} \left\{ - \sum_{i \in B - \{i^*\}} b_{ik^*} + 1 - b_{0k^*} - b_{.k^*} \right\} \\
 &= (1 - b_{i^*j}) + b'_{k^*j} (b_{i^*k^*}) = 1.
 \end{aligned}$$

用数值来看是否如此就是验算。

以上就作完了单纯形法的一个轮回。将此较图 3.1 更详细描绘出来如图 3.2。

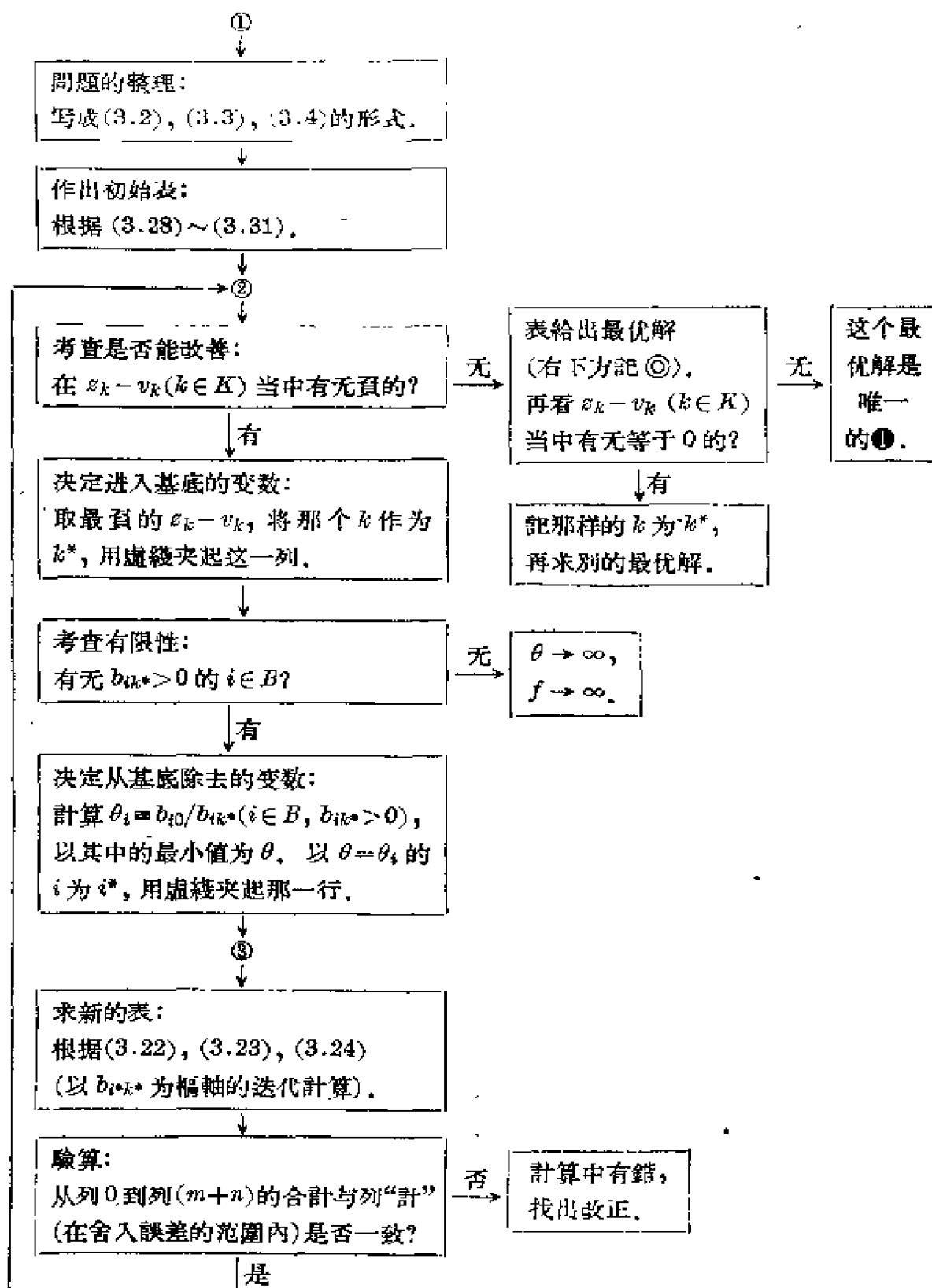


图 3.2 更詳細的单纯形計算的程序

还没有说明的是从①到②, 即最初的表是怎样作的。那只要是 S 型的表就都可以, 但一般是将问题整理成 (3.2), (3.3), (3.4) 的形式, 再如下面所说作出初始表 (参照后面的表 5.1):

$$B = \{n+1, \dots, n+m\}, \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{ij} &= s_{i-n} & (i \in B, j=0), \\ &= a_{i-n,j} & (i \in B, j=1, \dots, n), \\ &= -\delta_{ij} & (i \in B, j=n+1, \dots, n+m), \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

$$b_{i, n+m} = b_{i0} + b_{i1} + \dots + b_{i, n+m}. \quad (3.30)$$

下边添上

$$b_{0j} = z_j - v_j = \sum_{i \in B} v_i b_{ij} - v_j \quad (j=0, 1, \dots, n+m) \quad (3.31)$$

的计算 (这里设 $v_0=0$).

这就到达②, 因而可以开始上面的轮回。

由于不同的情况, 若利用对于类似问题的最优表制作初始表, 则有时可能快些。

补注 创造单纯形法的是 G. B. Dantzig (文献 [1], 第 XXI 章)。想出现在这里说明的形式的表的, 根据 Charnes (文献 [3], 第 66 页) 所说, 是 A. Orden, G. B. Dantzig 和 A. J. Hoffman.

单纯形法是继续从基底解到基底解的旅行 (就图 1.1 说, 从顶点走到顶点), 最后达到最优解的方法。为在理论上保证这种作法的正确, 还有必要作以下的说明。

第 1, 满足条件的点 (x_1, \dots, x_n) 的集合 S (§1) 是凸集, 特别, 若它有界, 就是凸 (超) 多面体。并且因目标函数 f 是线性, 一般可说, 若它的最大值是有限的, 它发生在 S 的一个极点 (顶点) 上, 或者是在作为几个极点的线性组合 (系数是非负的) 所得的一个单纯形上。在单纯形法里所谓基底解不外是集合 S 的极点, 因此, 所求的最优解若是唯一, 它是一个基底解, 所以与最优基底解一致。若最优解有几个, 则最优基底解也有两个以上, 那就可以从求出全部的最优基底解作非负系数的线性组合而得到所有的最优解。因为是这样, 所以我们就可以把检查的范围只限在基底解上。

第 2, 图 3.2 的程序一定可以开始, 明显地, 只要同样的基底不会再出

現,一定在有限回完了(因基底最多不过有 $n+mC_m$ 个)。因为目标函数 f 的值普通是随每一段根据(3.18)增加,我們逐渐进到有利的基底,不会倒退到不利的基底。只是若(3.18)中的 θ 为0,則下一段中的 f 就停留在現有的值上。若发生这种事,可能在有相同的 f 值的几个基底解之間轉来轉去永不完了。在实际的計算中,如使用高速自动計算机,可以将每段的 f 值(即 z_0)和基底变数的出入印刷出来加以監視,因而若发生这种事就很容易知道(根据經驗,那样的“巡回”好象不大会发生)。只是,作为理論上的保証(例如,利用最优表的存在想要証明什么的时候),有必要考虑防止那样的巡回。

A. Charnes (文献[3])用“扰动法”解决了这个问题①。即认为 $\theta=0$ 的发生是一种“退化 (degeneracy)”。为了防止它,用任意小的正数 ε ,考虑以

$$s_i + \varepsilon^i \quad (i=1, \dots, m) \quad (3.32)$$

置换 s_i 的問題,对此使其进行图3.2的程序②。这样,象从后面的(5.1)所知道的那样,任意表中 s 的列都置換成

$$[\text{本来的 } s \text{ 列}] + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots + \varepsilon^m Q_m. \quad (3.33)$$

(3.33)的,相当于变数 $y_i (i \in B)$ 的行的分量是

$$b_{i0} + \varepsilon b_{i, n+1} + \varepsilon^2 b_{i, n+2} + \dots + \varepsilon^m b_{i, n+m}. \quad (3.34)$$

这决不是0。即使 b_{i0} 是0, $b_{ij} (j=n+1, \dots, n+m)$ 之中必有不是0的。[这是因为图3.2中的迭代是乘上一个正规矩陣,从单位矩陣出发将此反复进行的结果所得的矩陣 Q (它的各列是 Q_1, \dots, Q_m)是正规的原故。]所以,对于这个变形的問題, $\theta=0$ (退化)不会发生。对于它的 f 值

$$f = z_0 + \varepsilon z_{n+1} + \varepsilon^2 z_{n+2} + \dots + \varepsilon^m z_{n+m}, \quad (3.35)$$

严密地說只有增加的一方面。这样就可以防止巡回。在这种作法时,对于(3.20)的 θ ,只要将 b_{i0} 置換为 $b_{i0} + \varepsilon b_{i, n+1} + \dots + \varepsilon^m b_{i, n+m}$ 考虑,則 $\theta=\theta_i$ 的 i 是唯一的(若不是这样,下一段中出现是0的(3.34),而与上述矛盾)。以此作为 i^* 。

最后,在最优表中若 $z_k - v_k (k \in K)$ 当中有等于0的,則就存在有两个以上最优基底解。此外,若最終表中发生退化, $b_{i0} (i \in B)$ 当中有是0的,将此看为微小的負值,利用对偶法(§6)可以求出另外的最优基底解。在这种情况下

① 后来 Dantzig 等将此換成代数的語言。[G. B. Dantzig, A. Orden, and P. Wolfe: Notes on Linear Programming, Part 1. The Generalized Simplex Method, RAND paper, 1954].

② 本节从此以后的部分,在初学时可暫不讀,等看完§5后再讀。

下,为了提高进行求出所有存在的最优基底解的計算的效率,将最优基底解全体看成一个“迷路”,可以应用“图的理論”中的迷路探險的原则——“走尽所有的可能性,再回到原来的路上”[根据 Charnes (文献[3],第69~70頁)]。但在实际問題中不会成为那么复杂的迷路。

§4 罰款 M 的利用

在前节討論的标准型的問題里,約束条件都是(1.1)形式的不等式,并且它右边的 $s_i (i=1, \dots, m)$ 都作为正的来处理的。

但是,在实际問題里,有时約束条件是作为等式

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = s_i \quad (4.1)$$

或方向相反的不等式

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq s_i \quad (s_i > 0) \quad (4.2)$$

出現。本节就叙述这种情况的处理方法。

先討論混有(4.1)形式的等式的情况。若导入与到現在有着同样意义的“使用剩余”的松弛变数 λ_i

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda_i = s_i, \quad (4.3)$$

則条件(4.1)可改写为 $\lambda_i = 0$ 。过去可以是 $\lambda_i \geq 0$, 現在必須是 $\lambda_i = 0$ 。

这里,将問題少許变一下,姑先容許有正的 λ_i 。但是作为交換,如果 λ_i 是正的,則利潤会变得非常小的話,又怎么样呢? 这就要采取“吓破胆那样的罰款”去禁止正的 λ_i 。这样一来,条件式还可照旧象(1.13), (1.14), 但对利潤的式子(1.15)要加上 $-M\lambda_i$ 形式的項。这个 $M\lambda_i$ 表示“吓破胆那样的罰款”的金額。 λ_i 若是 0, 这一項是 0。而且設想不管怎样小, λ_i 若取正值,由于这一項的影响,利潤成为大的不得了的負值。这样作款可以将問題改成标准型的。

例1 在 §1 例1 中,假設只是要求煤炭的 360 吨全部用完。如此問題就是:在約束条件 $9x_1 + 4x_2 = 360$, $4x_1 + 5x_2 \leq 200$, $3x_1 + 10x_2 \leq 300$ 和 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ 下使 $f = 7x_1 + 12x_2$ 最大。

导入松弛变数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 将问题改写, 就成为: 在约束条件 $9x_1 + 4x_2 + \lambda_1 = 360$, $4x_1 + 5x_2 + \lambda_2 = 200$, $3x_1 + 10x_2 + \lambda_3 = 300$ 和 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$ 下使 $f = 7x_1 + 12x_2 - M\lambda_1$ 最大。这里 M 设为非常大的正数。单纯形表成为表 4.1 的样子。

表 4.1 有等式的例子

段	$v_j \rightarrow$	0	7	12	$-M$	0	0		
	v_i	变数	s	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	θ_i
1	$-M$	λ_1	360	9	4	1	0	0	40
	0	λ_2	200	4	5	0	1	0	50
	0	λ_3	300	3	10	0	0	1	100
		$z_j - v_j$	$-360M$	$-9M - 7$	$-4M - 12$	0	0	0	
2	7	x_1	40	1	4/9	1/9	0	0	90
	0	λ_2	40	0	29/9	$-4/9$	1	0	12.4
	0	λ_3	180	0	78/9	$-3/9$	0	1	20.8
		$z_j - v_j$	280	0	$-80/9$	$M + 7/9$	0	0	
3	7	x_1	1000/29	1	0	5/29	$-4/29$	0	
	12	x_2	360/29	0	1	$-4/29$	9/29	0	
	0	λ_3	2100/29	0	0	25/29	$-78/29$	1	
		$z_j - v_j$	11320/29	0	0	$M - 13/29$	80/29	0	◎

最优规划是 $x_1 = 1000/29 = 34.48$ 公斤, $x_2 = 360/29 = 12.41$ 公斤, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2100/29 = 72.41$ 人日, 利润是 $f = 11320/29 = 390.34$ 万元 (相当于图 1.1 的 C 点)。

再来叙述混有 (4.2) 形式的不等式情况的处理方法。在这个情况下导入表示“使用过度”的松弛变数 μ_i

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - \mu_i = s_i, \quad (4.4)$$

条件 (4.2) 成为 $\mu_i \geq 0$ 。

这样, 问题的条件好象一时变成 (1.13), (1.14) 的形式, 但实际上这还不能开始单纯形的解法。因为当将松弛变数全部取作基底变数的时候, 在 (4.4) 中使 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 所得的值 $\mu_i = -s_i$ 不

滿足條件 $\mu_i \geq 0$ (參照 § 7 的末尾)。

此時也導入形式上的資源 i 的使用剩餘 λ_i

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + \lambda_i - \mu_i = s_i, \quad (4.5)$$

同時,在利潤的式子上加入 $-M\lambda_i$ 的一項,若 λ_i 是正的,則被征收“吓破胆那樣”的罰款。這樣,問題就回到標準型上。

例 2 在 § 1 例 1 中,設只是要求電力使用 200 瓩小時以上。如此問題就是:在約束條件 $9x_1 + 4x_2 \leq 360$, $4x_1 + 5x_2 \geq 200$, $3x_1 + 10x_2 \leq 300$ 和 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ 下,使 $f = 7x_1 + 12x_2$ 最大。

表 4.2 有反方向不等式的例子

段	$v_j \rightarrow$ v_i 變數	0 f_s	7 x_1	12 x_2	0 λ_1	$-M$ λ_2	0 λ_3	0 μ_2	θ_i
1	0 λ_1	360	9	4	1	0	0	0	90°
	$-M$ λ_2	200	4	5	0	1	0	-1	40
	0 λ_3	300	3	10	0	0	1	0	30
	$z_j - v_j$	$-200M$	$-4M$ -7	$-5M$ -12	0	0	0	M	
2	0 λ_1	240	7.8	0	1	0	-0.4	0	30.8
	$-M$ λ_2	50	2.5	0	0	1	-0.5	-1	20
	12 x_2	30	0.3	1	0	0	0.1	0	100
	$z_j - v_j$	$-50M$ +360	$-2.5M$ -3.4	0	0	0	$0.5M$ +1.2	M	
3	0 λ_1	84	0	0	1	-3.12	1.16	3.12	26.9
	7 x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	-0.4	—
	12 x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	0.12	200
	$z_j - v_j$	428	0	0	0	M +1.36	0.52	-1.36	
4	0 μ_2	26.928	0	0	0.32051	-1	0.37180	1	
	7 x_1	30.769	1	0	0.12820	0	-0.05128	0	
	12 x_2	20.769	0	1	-0.03846	0	0.11538	0	
	$z_j - v_j$	464.615	0	0	0.43589	M	1.02565	0	◎

引进使用剩余 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 和使用过度 μ_2 , 改写问题, 就成为: 在约束条件 $9x_1 + 4x_2 + \lambda_1 = 360$, $4x_1 + 5x_2 + \lambda_2 - \mu_2 = 200$, $3x_1 + 10x_2 + \lambda_3 = 300$ 和 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ 下, 使 $f = 7x_1 + 12x_2 - M\lambda_2$ 最大。这里 M 设为非常大的正数。单纯形表成为表 4.2 的样子。

最优规划是 $x_1 = 30.769$, $x_2 = 20.769$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\mu_2 = 26.923$, 利润是 $f = 464.615$ (相当于图 1.1 的 E 点)。

如上面所说, 在条件中混有等式或反方向的不等式的情况, 可以利用罚款处理。但是在这个 M 留在 z_0 之中的时候, 那个表所表示的规划是不可能实现的 (被征收罚款)。因此, 虽然尽管 $(z_k - v_k)$ ($k \in K$) 当中没有负的, 单纯形计算完了, 如果发生了 z_0 当中还有 M 的事情, 这就意味条件过苛而没有解 (没有同时满足给定的条件的解)。

表 4.3 不可行情况的例子

段	$v_j \rightarrow$ v_i 变数	0 s	7 x_1	12 x_2	0 λ_1	$-M$ λ_2	0 λ_3	0 μ_2	θ_i
1	0 λ_1	360	9	4	1	0	0	0	90
	$-M$ λ_2	400	4	5	0	1	0	-1	80
	0 λ_3	300	3	10	0	0	1	0	30
	$z_j - v_j$	$-400M$	$-4M$ -7	$-5M$ -12	0	0	0	M	
2	0 λ_1	240	7.8	0	1	0	-0.4	0	30.8
	$-M$ λ_2	250	2.5	0	0	1	-0.5	-1	100
	12 x_2	30	0.3	1	0	0	0.1	0	100
	$z_j - v_j$	$-250M$ +360	$-2.5M$ -3.4	0	0	0	$0.5M$ +1.2	M	
3	7 x_1	30.8	1	0	0.128	0	-0.051	0	
	$-M$ λ_3	173.0	0	0	-0.320	1	-0.372	-1	
	12 x_2	20.8	0	1	-0.384	0	0.053	0	
	$z_j - v_j$	$-173M$ +465	0	0	$0.320M$ +0.435	0	$0.372M$ +0.68	M	◎

例 3 在約束条件: $9x_1 + 4x_2 \leq 360$, $4x_1 + 5x_2 \geq 400$, $3x_1 + 10x_2 \leq 300$ 和 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ 下, 使 $f = 7x_1 + 12x_2$ 最大。

这个情况与例 2 同样, 引进使用剩余 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 和使用过度 u_2 进行单纯形计算, 成为表 4.3 的样子。

在表中的第 3 段, $z_j - v_j$ ($j=1, \dots, 6$) 都 ≥ 0 。所以尽管这就是最終的表, 但 $z_0 = -173M + 465$ 还是处在被罰款的状态。就是說, 确定了不管怎样努力也免不了罰款(讀者可以划图看一看)。

第2章 綫性关系的保存性

§5 修訂单纯形法

单纯形法的創始者 G. B. Dantzig 后来提出了一个修訂方案 [G. B. Dantzig: Notes on Linear Programming, Part III: Computational Algorithm of the Revised Simplex Method, RM-1266, RAND Corporation, 1953]. 为了理解它的用意,看一看对于单纯形一般成立的綫性规划的保存性将是有帮助的。

对一个矩陣进行迭代的計算时,列与列之間成立的綫性关系是被保存下来的(參閱本丛书,森口、高田:数值計算法 I, §1)。因此,在单纯形表上,在最初的表中成立的綫性关系,在其后导出的所有的表中也都成立。这一点的应用很广。

現在,若对在 §1 的开头所举的問題作初始表,就象表 5.1 那样(參照 §3 的末尾)。

表 5.1 初 始 表

段		$v_j \rightarrow$	0	$v_1 \quad \cdots \quad v_n$	0 0 \cdots 0	
	v_i	变 数	s	$x_1 \quad \cdots \quad x_n$	$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots, \lambda_m$	計
1	0	λ_1	s_1	$a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}$	1 0 \cdots 0	\cdots
	0	λ_2	s_2	$a_{21} \quad \cdots \quad a_{2n}$	0 1 \cdots 0	\vdots
	\vdots	\vdots	\vdots	$\vdots \quad \quad \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots$	\vdots
	0	λ_m	s_m	$a_{m1} \quad \cdots \quad a_{mn}$	0 0 \cdots 1	\cdots
		$s_j - v_j$	0	$-v_1 \quad \cdots \quad -v_n$	0 0 \cdots 0	\cdots

表中 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 的列一般称为 Q_1, \dots, Q_m 。在表 5.1 中引人注目的是这些列都是基本单位向量。因此,其他的任何列都可以表示为 Q_1, \dots, Q_m 的綫性組合,其中的系数是列中的各个分量。

例如,

$$[s \text{ 列}] = s_1 Q_1 + \cdots + s_m Q_m, \quad (5.1)$$

$$[x_j \text{ 列}] = a_{1j} Q_1 + \cdots + a_{mj} Q_m \quad (j=1, \cdots, n). \quad (5.2)$$

这样,由于上面提到的保存性,这些关系被保存下来,而对所有的表都是成立的。

例 1 表 2.1 中,因为在第 1 段

$$[s \text{ 列}] = 360[\lambda_1 \text{ 列}] + 200[\lambda_2 \text{ 列}] + 300[\lambda_3 \text{ 列}]$$

成立,所以在第 3 段

$$\begin{bmatrix} 84 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} = 360 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} -3.12 \\ 0.40 \\ -0.12 \end{bmatrix} + 300 \begin{bmatrix} 1.16 \\ -0.20 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

也成立(这很容易验证)。

例 2 在表 2.1 的第 1 段中,显然是

$$[x_1 \text{ 列}] = 9[\lambda_1 \text{ 列}] + 4[\lambda_2 \text{ 列}] + 3[\lambda_3 \text{ 列}],$$

同样的关系,在第 3 段中

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3.12 \\ 0.40 \\ -0.12 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1.16 \\ -0.20 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

也是成立的。

而且更对于由 (3.14) 定义的 z_j , 显然同样的关系也是成立的。

例 3 表 2.1 中 $z_0 = 360 z_1 + 200 z_2 + 300 z_3$ 即 $428 = 360 \times 0 + 200 \times 1.36 + 300 \times 0.52$ 成立(注意有关系的 v_j 都是 0)。并且 x_1 列的 $z_j - v_j$ 可以作为

$$9z_1 + 4z_2 + 3z_3 - 7 = (9 \times 0 + 4 \times 1.36 + 3 \times 0.52) - 7 = 0$$

计算。

对应某一个表中基底变数的初始表的列向量称为“基底向量”。把这些排起来所作的矩阵称之为“基底矩阵”。在那个表中对应松弛变数 $\lambda_i (i=1, \cdots, m)$ 的列所作的矩阵 $Q = [b_{ij}; i \in B,$

$j=n+1, \dots, n+m]$ 是基底矩陣的逆矩陣。証明可以从下面的例子显然看出。

例4 在表 2.1 的第 3 段中, 基底变数是 λ_1, x_1, x_2 . 因此, 基底矩陣是

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

另一方面, 表中第 3 段, 对应 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的列所作的矩陣是

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -3.12 & 1.16 \\ 0 & 0.40 & -0.20 \\ 0 & -0.12 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

为了看出这是基底矩陣的逆矩陣, 只須同例 2 一样导出下式的关系:

$$Q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(上面的第 2 式就是例 2 本身)。

有了以上的准备, 現在來說明修訂单纯形法。將其步驟示于图 5.1.

此法的特征在于, 对单纯形表中所有的, 只計算上面所說的逆矩陣的那一部分, 即 $z_j - v_j$ 的行, 以及第 k^* 列, 其他的都不計算。

对应 $\lambda_i (i=1, \dots, m)$ 的 $z_j (j=n+i)$ 是与普通的单纯形法同样計算(第 2 段以后用迭代法), 其他的 $z_j (j=0, 1, \dots, n)$ 以

$$z_0 = \sum_{i=1}^m z_{n+i} s_i, \quad (5.3)$$

$$z_j = \sum_{i=1}^m z_{n+i} a_{ij} \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.4)$$

計算(参照例 3). 由此求出判別准則 (criterion) $z_j - v_j$, 选其中“最負”的, 決定号碼 k^* (如果没有負的 $z_j - v_j$, 就是得到了最优表)。

若 $k^* \leq n$, 則第 k^* 列可从逆矩陣 Q 的各列 $Q_i (i=1, \dots, m)$

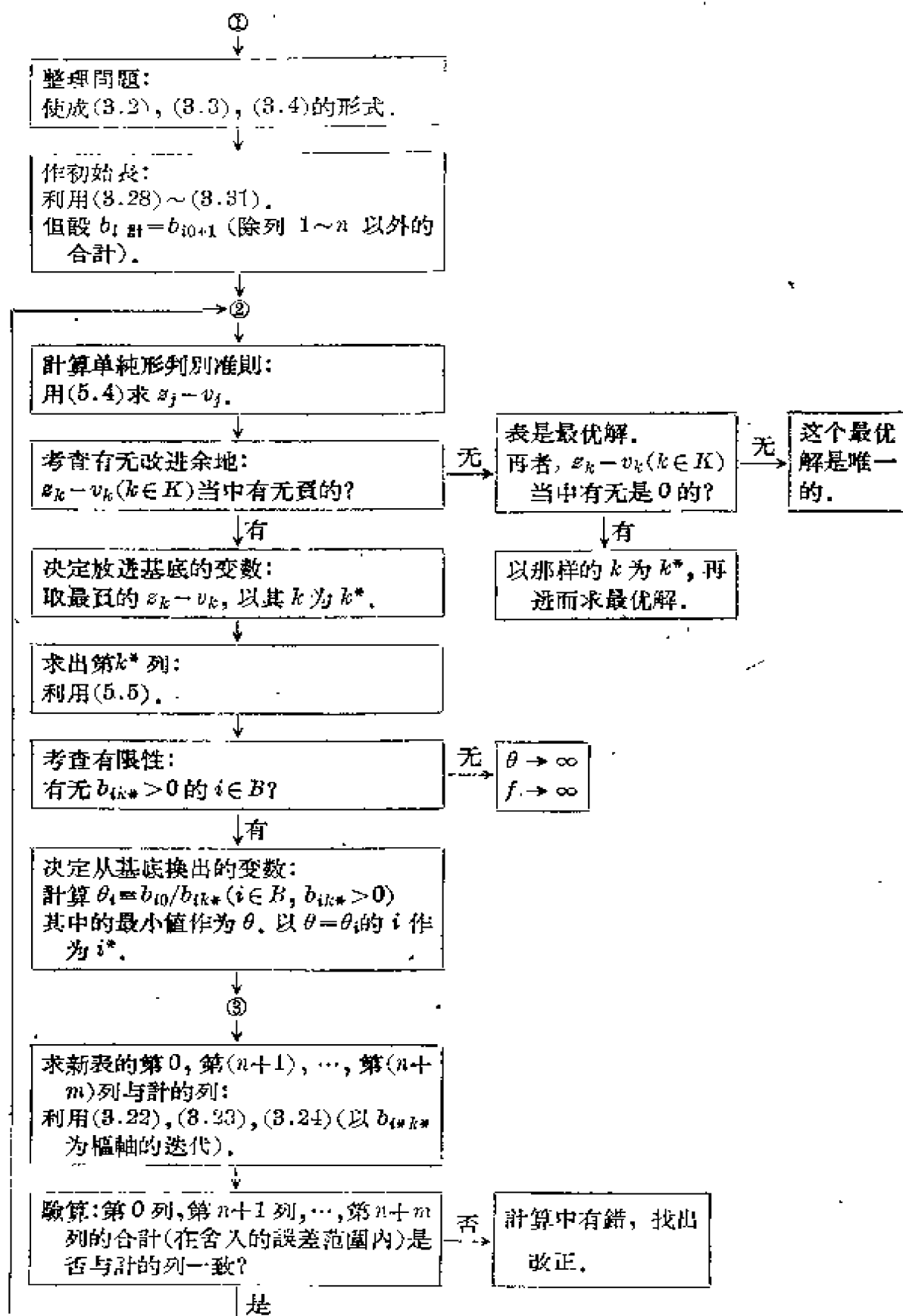


图 5.1 修訂單純形法

以

$$[\text{第 } k^* \text{ 列}] = \sum_{i=1}^m Q_i a_{ik^*} \quad (5.5)$$

求出(参照(5.2))。若 $k^* > n$ ，則第 k^* 列就是 Q_{k^*-n} ，所以不必要特別計算。这样，第 k^* 列一出来，以后用与普通的单纯形法同样的方式，决定换出的变数的号码 i^* ，再用以 $b_{i^*j^*}$ 为樞軸的迭代計算，求出下一个表的 s 的列与 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 的列。这就完成了一次輪回。

根据这个方法，迭代的計算只須对 $(m+1)$ 行 $(m+1)$ 列的矩陣进行(为此約需 m^2 次的乘算)。普通的单纯形法中須对 $(m+1)$ 行 $(m+n+1)$ 列的矩陣作迭代[为此所需的乘算約 $m(m+n)$ 次]。只从这一点看，或許以为修訂单纯形法比普通的单纯形法要簡便的多。但是，实际上計算量的節約一般說并不那样显著。

第1，虽說在普通的单纯形法中大約需要 $m(m+n)$ 次乘算，但实际上其中有相当多的并不用計算。就是說，与基底变数对应的列显然是单位向量，因而不必要特別計算。如果将它省去，1段的迭代中必需的乘算大約是 mn 次。当然，同理，对修訂单纯形法的迭代也如此。因此，实际上必要的計算除了 s 的列以外，只是对应于在松弛变数当中从基底出来的那些列。一般說这个数目随段数增加而增大。在某一段，若进入基底的松弛变数有 p 个，为求这一段的逆矩陣的迭代中所需的乘算大約是 mp 次。

第2，在普通的单纯形法中， $z_j - v_j$ 是全部用迭代法求出，所以不用另外計算。但在修訂单纯形法中，对于 $j=1, \dots, n$ 的 $z_j - v_j$ ，要用(5.4)計算。因此，另外需要 mn 次的乘算。不过，其中对应于进入基底的变数的那些，不必要計算。这样的变数只有 p 个(从基底换出的松弛变数的个数)。所以，实际上必要的乘算次数大約是 $m(n-p)$ 次。

在修訂单纯形法中，对于第1段來說，实质上必要的乘算在迭代上大約是 mp 次，在判別准則 $z_j - v_j$ 上大約是 $m(n-p)$ 次，加在一起大約是 mn 次。与在普通的单纯形法的第1段中所要乘算次数(只是迭代)一致。这样，实质上必要的乘算次数在两者之間几乎沒有差別。

然而，在技术系数 a_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) 当中有許多是0的情况(矩陣 $[a_{ij}]$ 是稀松(sparse)的情况)，如用一种与0相乘的計算比普通的乘

算容易进行的計算手段(例如手算),則(5.4)的計算便很輕松,因而就可以节省很多。除了这一点,修訂单纯形法同普通的单纯形法的优劣,因为与所用的計算手段,特别是程序設計和記憶装置有关,不能一概而言。再者,也想出有这样一种方法:不是对逆矩陣本身,而是只把每次迭代所需的乘数 b_{ik*}/b_{i*k*} ($i \in B - \{i^*\} + \{0\}$) 及 $1/b_{i*k*}$ (全部总共 $m+1$ 个) 記憶下来,必要时用乘积的形式替代逆矩陣进行計算 [G. B. Dantzig and W. Orchard-Hays: Notes on Linear Programming, Part V, Alternative Algorithm for the Revised Simplex Method Using a Product Form for the Inverse, RAND Corp., 1953]。据说这种方法适合于象 IBM 701 那样的高速计算机。

在运输問題 (§ 8) 中,表本体部分的元素限于 1 或 0 或 -1。因此,以乘算次数为指标的討論就不确切了。实际上,作为运输問題的实用解法,如所周知的 MODI 法的本质可以說就是修訂单纯形法。

补注 在本节中提到的綫性关系的保存性,可以有一个几何学的解釋。就是,单纯形表的各列各自看作 m 維向量空間的向量,在它們之間成立如 (5.1) 与 (5.2) 的关系。一般說,若記对应变数 y_j 的向量为 P_j ($j=1, \dots, n+m$), 对应 S 列的向量为 P_0 , 則解都須滿足 $\sum_{j=1}^{n+m} y_j P_j = P_0$ (在初始表中, 就是 (3.2))。特别是,对于任何一个基底解 (3.12), 有

$$\sum_{i \in B} b_{i0} P_i = P_0 \quad (5.6)$$

成立。并且,在与此对应的表中容易认出有

$$\sum_{i \in B} b_{ij} P_i = P_j \quad (j=0, 1, \dots, n+m) \quad (5.7)$$

成立。这可以看作为 P_i ($i \in B$) 是上述向量空間的一个“基底 (basis)”, (5.7) 是用这个基底所作的向量 P_j ($j=0, 1, \dots, n+m$) 的表示。从一个表到另一个表的轉換是向量空間中的基底的變換。就是說,将在 (5.7) 中 $j=k^*$ 变成下列的形式:

$$b_{i^*k^*} P_{i^*} + \sum_{i \in B - \{i^*\}} b_{ik^*} P_i = P_{k^*}. \quad (5.8)$$

对 P_{i^*} 求解,得

$$P_{i^*} = \frac{1}{b_{i^*k^*}} P_{k^*} - \sum_{i \in B - \{i^*\}} \frac{b_{ik^*}}{b_{i^*k^*}} P_i. \quad (5.9)$$

将此代入对于一般的 j 的 (5.7) 式左边,得

下,使

$$g = u_1 s_1 + \cdots + u_m s_m \quad (6.6)$$

最小。

在本节中,設 a_{ij} , s_i , v_j 为任意給定的实数(正負皆可,在第1章里假定 $s_i > 0$)。这样,在里的问题中对 (6.4) 和 (6.6) 同乘以 -1 , 就变成表的问题的形式。对于它再进行上述同样的变换,又作出它的里的问题,这实质上成为原来的表的问题。因此,对偶关系是互相的。

現在,設表的问题是标准型(就是所有的 $s_i > 0$), 由此得到一组最优解 x_j^* ($j=1, \dots, n$)。另一方面,考虑满足里的问题的条件 (6.4), (6.5) 的任意的 u_i ($i=1, \dots, m$), 則有

$$g = \sum_{i=1}^m u_i s_i \geq \sum_{i=1}^m u_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m u_i a_{ij} \right) x_j^* \geq \sum_{j=1}^n v_j x_j^* = f_{\max} \quad (6.7)$$

成立。就是說,对于满足条件 (6.4), (6.5) 的任意的 u_i ($i=1, \dots, m$), $g \geq f_{\max}$, 因此,若其中有使 $g = f_{\max}$ 的 u_i ($i=1, \dots, m$), 它就是里的问题的解。为此, (6.7) 中的 2 个 \geq 都必须成为 $=$ 。也就是說,以那样的 u_i 为 u_i^* , 則对于它, 在 (6.4), (6.5) 以外, 还必须

$$\text{若 } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < s_i, \text{ 則 } u_i^* = 0, \quad (6.8)$$

$$\text{若 } x_j^* > 0, \text{ 則 } \sum_{i=1}^m u_i^* a_{ij} = v_j \quad (6.9)$$

成立。然而,在最优表中以 λ_i 列的 $z_j - v_j$ ($j=n+i$) 各为 u_i^* ($i=1, \dots, m$), 則对于这个 u_i^* 正是成立上述的关系。

証明 因由定义 $v_j = 0$ ($j=n+1, \dots, n+m$), 所以 $u_i^* = z_{n+i}$ ($i=1, \dots, m$)。因而从 (5.4), 得

$$z_j = \sum_{i=1}^m z_{n+i} a_{ij} = \sum_{i=1}^m u_i^* a_{ij}.$$

但因在最优表中 $z_j - v_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n+m$), 所以在最先的 n 个当中 $\sum u_i a_{ij} \geq v_j$, 以后的 m 个当中 $u_i^* \geq 0$, 即知 u_i^* 满足 (6.4), (6.5).

再若 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < s_i$, 松弛变数 λ_i 一定会进入基底, 因此 $z_{n+i} - v_{n+i} = 0$, 即 $u_i^* = 0$. 再若 $x_j^* > 0$, 则变数 x_j 进入基底, 所以 $z_j - v_j = 0$, 即 $\sum_{i=1}^m u_i^* a_{ij} = v_j$. 即 u_i^* 满足 (6.8), (6.9). 证毕

通过以上的讨论, 得出如下的定理:

定理 当表的问题是标准型时, 若对于它得到最优表, 则对应它的松弛变数的 $z_j - v_j$ 给出里的问题的解, 并且 $g_{\min} = f_{\max} = z_0$.

例 1 在约束条件: $3u_1 \geq 1$, $2u_1 + 4u_2 \geq 4$, $2u_1 + u_2 \geq 3$, $3u_1 \geq 3$, $4u_1 + 2u_2 \geq 4$, $u_1 + 2u_2 \geq 1$, 与 $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ 下, 使 $g = 2u_1 + 2u_2$ 最小。

这个问题是前面的里的问题的形式。与此相对的表的问题是: 在约束条件:

$$2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 2,$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_6 + 2x_8 \leq 2$$

与

$$x_1 \geq 0, \dots, x_8 \geq 0$$

下, 使

$$f = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6$$

最大。

对于这个问题的单纯形表如表 6.1.

从表 6.1 中第 4 段知道, 对于原来问题的最优解是 $u_1^* = 4/3$, $u_2^* = 1/3$, 对此 $g = g_{\min} = 10/3$.

[注] 象这样条件的个数比变数的个数多, 而且条件是反方向的不等式时, 换作对偶问题处理是很方便的。

当表的问题不是标准型, 而利用罚款归结为标准型时, 同样的关系也成立 (这时在对应于松弛变数的各个 $z_j - v_j$ 当中, 除 M 项以外的各项给出 u_i^*)。

若表的问题的条件中有等式, 例如 $\sum a_{ij} x_j = s_i$, 可将它换为一对不等式 $\sum a_{ij} x_j \geq s_i$ 与 $\sum a_{ij} x_j \leq s_i$. 这与 $\sum (-a_{ij}) x_j \leq (-s_i)$ 和

表 6.1 对偶問題的例子

段	$v_j \rightarrow$ v_i 变数	0 s_i	1 x_1	4 x_2	3 x_3	3 x_4	4 x_5	1 x_6	0 λ_1	0 λ_2	計	θ_i
1	0 λ_1	3	0	2	2	3	4	1	1	0	15	1
	0 λ_2	2	3	4	1	0	2	2	0	1	15	$\frac{1}{2}$
	$z_j - v_j$	0	-1	-4	-3	-3	-4	-1	0	0	-16	
2	0 λ_1	1	-3/2	0	3/2	3	3	0	1	-1/2	15/2	$\frac{1}{3}$
	4 x_2	1/2	3/4	1	1/4	0	1/2	1/2	0	1/4	15/4	$\frac{1}{2}$
	$z_j - v_j$	2	2	0	-2	-3	-2	1	0	1	-1	
3	3 x_4	1/3	-1/2	0	1/2	1	1	0	1/3	-1/6	5/2	$\frac{2}{3}$
	4 x_2	1/2	3/4	1	1/4	0	1/2	1/2	0	1/4	15/4	$\frac{1}{2}$
	$z_j - v_j$	3	1/2	0	-1/2	0	1	1	1	1/2	13/2	
4	3 x_3	2/3	-1	0	1	2	2	0	2/3	-1/3	5	
	4 x_2	1/3	1	1	0	-1/2	0	1/2	-1/6	1/3	5/2	
	$z_j - v_j$	10/3	0	0	0	1	2	1	4/3	1/3	9	⊙

$\sum a_{ij}x_j \leq s_i$ 等价。这样,在里的問題中,假設与它們对应的变数为 u_{i-}, u_{i+} , 則在里的問題的条件里会出现如 $(u_{i+} - u_{i-})a_{ij}$ 的項, 在目标函数 g 里也会出现如 $(u_{i+} - u_{i-})s_i$ 形式的項。这就是說其中有 $u_i \equiv u_{i+} - u_{i-}$ (不受正負限制的) 变数。其逆亦真。

当表的問題的解是无限大时,則里的問題无解(不存在滿足任何条件的 u_i)。当表的問題无解时,則里的問題的解或是无限大或无解。

里的問題的解 u_i^* 对于表的問題有什么意义呢? 它是与最优表中松弛变数 λ_i 对应的 $z_j - v_j$ 。若 λ_i 不在基底里面,則在最优规划中 $\lambda_i = 0$, 就是說資源 i 是用尽了的, 而且若作只增加 1 单位的 λ_i (只剩下 1 单位的資源 i) 的修正, 則利潤减少 u_i^* (参照 (3.14))。假若对于資源 i 的利用限度只减少了 1 单位, 这与在現在的状态下只剩下 1 单位是同样的, 因此, 也就一定滿足于只减少 u_i^* 的利

潤了。換句話說，資源 i 的最后 1 單位對我們只有 w_i^* 的價值。資源 i 的“邊際價值”就是 w_i^* 。這也稱為影子價格 (shadow price)，轉嫁價格 (imputed price) 等。

根據這種解釋，重新看 (6.8)，(6.9) 就很有興趣。(6.8) 表示：在最优規劃中可以剩下的資源的邊際價值是 0；(6.9) 意味着：對於在最优規劃中實際進行的活動，利用各種資源的邊際價值所計算的被消費的價值，與其產生的價值相等。

在這裡再來說明一下所謂對偶法 (dual method) (C. E. Lemke and A. Charnes: Extremal problems in linear inequalities, Carnegie Inst. of Tech., Dept. of Math., Tech. Rep. No. 36, 1953, 78 pp.)。這可以說是將里的問題的單純形計算當作對於表的問題的表來看的一種東西。但是實用上不如將它理解為下述的形式倒反方便。

現有某一表中，本體部分表示為

$$y_i + \sum_{k \in K} b_{ik} y_k = b_{i0} \quad (i \in B), \quad (6.10)$$

下邊記入

$$z_j - v_j = b_{0j} \quad (j = 0, 1, \dots, n+m) \quad (6.11)$$

(參照 § 3)。但是，在 § 3 中假定 $b_{i0} \geq 0$ ($i \in B$)，而在這裡不作如此的限制，代之以 $b_{0k} \geq 0$ ($k \in K$) 的假定 (b_{i0} ($i \in B$) 必然是 0)。為了簡單起見，稱服從這個假定的表為 **D 型** (取 dual 的头一个字母)。

在 D 型的表中，若同時 $b_{i0} \geq 0$ ($i \in B$)，它就是最优表，因此沒有問題。當 D 型表 b_{i0} ($i \in B$) 之中有負的情況，就有將它變形以達到最优表的問題。在這種變形中，與普通的單純形計算一樣，利用迭代。只是這時的樞軸件 b_{ik^*} 的選法不同。就是說，在圖 3.1 中從 ② 到 ③ 之間的規則要作以下的變動：

- (1) 從 b_{i0} ($i \in B$) 中找出最大的負數，記其號碼為 i^* 。

(2) 从 b_{i^*k} ($k \in K$) 中挑出所有的負的, 計算

$$\theta_k = -b_{0k}/b_{i^*k}. \quad (6.12)$$

(若所有的 $b_{i^*k} \geq 0$ ($k \in K$), 对于 $i=i^*$ (6.10) 决不会成立, 因此問題是不可能的。)

(3) 以 θ_k 中的最小值为 θ , 記 $\theta=\theta_k$ 的 k 为 k^* , 即使

$$\theta = \theta_{k^*} = \min(-b_{0k}/b_{i^*k} : k \in K, b_{i^*k} < 0). \quad (6.13)$$

这样, 到达了③。

以这样决定的元素 $b_{i^*k^*}$ 为樞軸, 进行根据 (3.22), (3.23), (3.24) 的迭代計算时, 新的表还是 D 型。

証明 新表下边的 b'_{0j} ($j=1, \dots, n+m$) 用 (3.24), (3.22) 計算为

$$b'_{0j} = b_{0j} - b_{0k^*} b'_{i^*j} / b_{i^*k^*} = b_{0j} - \frac{b_{0k^*} b_{i^*j}}{b_{i^*k^*}}. \quad (6.14)$$

但因 $b_{i^*k^*} < 0$, $b_{0k^*} > 0$, 所以若 $b_{i^*j} \geq 0$, 則 $b'_{0j} \geq b_{0j} \geq 0$. 再若 $b_{i^*j} < 0$ (因为这样的 j 一定属于 K), 則

$$b'_{0j} = -b_{i^*j} (-b_{0j}/b_{i^*j} + b_{0k^*}/b_{i^*k^*}) = (-b_{i^*j}) (\theta_j - \theta_{k^*}) \geq 0.$$

如此对于所有的 $j=1, \dots, n+m$, $b'_{0j} \geq 0$, 因此新的表也是 D 型。

新表的 z_0 (即 b_{00}) 与 (6.14) 同样是

$$z'_0 = z_0 - b_{i^*0} b_{0k^*} / b_{i^*k^*} = z_0 + b_{i^*0} \theta, \quad (6.15)$$

因为 $b_{i^*0} < 0$, $\theta > 0$ ($\theta=0$ 即所謂退化情况的討論省略), 所以 $z'_0 < z_0$. 就是說, 根据以上的手續將表加以变形, 則 z_0 单调减小, 不会停留在同一个基底, 因而最后达到最优表。这种作法就是对偶法, 此法将在下节的例子里用到。

§7 問題的修正

在綫性规划中, 得到一个問題的最优解以后, 又会产生与它只有少許差別的問題, 这种事是常有的。在这种情况下, 常常是利用对原有問題已經得到的最优表作新問題的初始表, 比对新問題从头

开始进行計算要简单。这时所得到的表若是 S 型, 用单纯形法 (§ 3); 若是 D 型, 則用对偶法 (§ 6) 来处理。本节将举几个例来討論这些方法。[参閱大沢丰: 关于綫性规划中的条件的变化, 經營科学, 第 1 卷, 第 1 号 (1956), 第 29~34 頁; 大阪大学經濟学, 第 5 卷 (1956), 第 582~605 頁。]

例 1 价值 v_j 的变化 設各种活动的价值 v_j 发生了变化。最优表的主体部分还是那样, 将 v_i 和 v_j 栏变为新的值。下边的 $z_j - v_j$ 栏 (z_0 也含在内) 也就随之利用 (3.14) 重新計算。其結果必是 S 型。若不出現負的 $z_j - v_j$, 最优解就不需要修正。若出現了負的 $z_j - v_j$, 根据普通的单纯形的步驟加以改善就行。

特别是当价值 v_j 的变化与参数 θ 有綫性关系, 而可以表示为

$$v_j = v_j^0 + v_j^1 \theta \quad (7.1)$$

时, 若記对于 $\theta=0$ 的最优表的元素为 b_{ij} ($i \in B, j=0, 1, \dots, n+m$), 則对于一般 θ 的 $z_j - v_j$ 成为

$$\begin{aligned} z_j - v_j &= \sum_{i \in B} (v_i^0 + v_i^1 \theta) b_{ij} - (v_j^0 + v_j^1 \theta) \\ &= \left(\sum_{i \in B} v_i^0 b_{ij} - v_j^0 \right) + \left(\sum_{i \in B} v_i^1 b_{ij} - v_j^1 \right) \theta \\ &\equiv (z_j^0 - v_j^0) + (z_j^1 - v_j^1) \theta. \end{aligned} \quad (7.2)$$

若 $j \in B$, 这必然是 0。当 $j \in K$ 时, 只要它 ≥ 0 , 則最优解不变。当 (7.2) 中 θ 的系数是負的, 而且 θ 变为充分大时, 这个条件就不会得到滿足。在这种情况下, 不需修正的 θ 的限度以

$$\theta = \min \left\{ -\frac{z_k^0 - v_k^0}{z_k^1 - v_k^1} : k \in K, z_k^1 - v_k^1 < 0 \right\} \quad (7.3)$$

給出(文献[13], 第 174 頁)。

例 2 在 § 1 例 1 中, 随产品 A 每 1 公斤的利潤逐漸增加, 最优规划与最大利潤有什么样的变化?

現在是 $v_1 = 7$ (万元/公斤)。因此令 θ 为正的参数, $v_1 = 7 + \theta$ 。对于 $\theta=0$, 在表 2.1 的第 3 段得到最优表, 因此用它作为初始表, 則得表 7.1 的

表 7.1 价值变化的例子

段	$v_i \rightarrow$ v_i 变数	0 s	$7+\theta$ x_1	12 x_2	0 λ_1	0 λ_2	0 λ_3	計	θ_1
1	0 λ_1	84	0	0	1	-3.12	1.16	83.04	72.41 →
	$7+\theta$ x_1	20	1	0	0	0.40	-0.20	21.20	--
	12 x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	25.04	150
	$s_j - v_j$	428 +20 θ	0	0	0	1.36 +0.40 θ	0.52 -0.20 θ	429.88 +20.20 θ	$0 \leq \theta \leq 2.6$
2	0 λ_3	72.41379	0	0	0.86207	-2.68966	1	71.58621	--
	$7+\theta$ x_1	34.48276	1	0	0.17241	-0.13793	0	35.51724	--
	12 x_2	12.41379	0	1	-0.13793	0.31035	0	13.58621	→
	$s_j - v_j$	390.34483 +34.48276 θ	0	0	-0.44828 +0.17241 θ	2.75862 -0.13793 θ	0	392.65517 +35.51724 θ	$2.6 \leq \theta \leq 20$
3	0 λ_3	179.99836	0	8.66654	-0.33330	0	1	189.33162	
	$7+\theta$ x_1	39.99987	1	0.44443	0.11111	0	0	41.55541	
	0 λ_2	39.99932	0	3.22217	-0.44443	1	0	43.77706	
	$s_j - v_j$	280.00191 +39.99987 θ	0	-8.88874 +0.44443 θ	0.77773 +0.11111 θ	0	0	271.89090 +41.55541 θ	$20 \leq \theta$

第1段。由此可見,在 $z_j - v_j$ 之中只可能 λ_3 列会成負的,它是 $0.52 - 0.20\theta$,所以 $\theta = 0.52/0.20 = 2.6$ 时成为0,只要 θ 不超过这个限度,就不会成为負的。因此,第1段(图1.1的B点)是在 $0 \leq \theta \leq 2.6$ 的范围内为最优。

設 θ 稍微超过2.6,轉到下一段(表7.1第2段)。这个表(图1.1的C点)是对于 $2.6 \leq \theta \leq 20$ 为最优。 θ 超过20,則 λ_2 列的 $z_j - v_j$ 变成負的,因而轉到第3段。第3段(图1.1的D点)是对于 $\theta \geq 20$ 为最优。

如此,得到随 θ 的变化而起的最优规划的轉变与最大利潤 f 的式子。以图表示,則如图7.1。

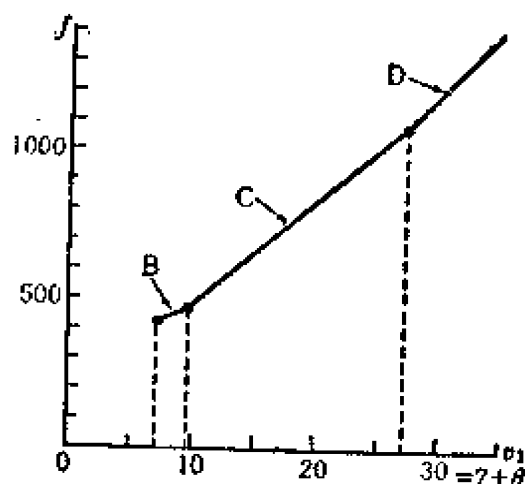


图7.1 随价值变化而引起
的利潤变化

再来考虑資源利用限度 s_i 发生变化的情况。这时在最后的表中,只将 s 列重新計算就行。为此用(5.1)。結果一定是D型。若 s 列中不出現負的,于此得到最优解。若出現了負的,用对偶法(§6)作改进就行。

例3 在§1例1中,电力的利用限度增大时,最优规划怎样变化?

用表2.1的第3段,重新計算 s 列为 $s_2 = 200 + \theta$,則得如表7.2的第1段。这是对 $0 \leq \theta \leq 26.92 (= 84/3.12)$ 的范围为最优。对于 $26.92 \leq \theta$,表中第2段(图1.1的E点)为最优。

当在最初的规划时不曾考虑到的活动有所追加的情况,可以根据修訂单纯形法(§5)的思路处理。就是說,用新的活动的技术系数与各种資源的边际价值 $w_i^* = z_{n+1}$,根据(5.4)求出 z_j ,将它同新的活动 v_j 比較,若 $z_j > v_j$,則采取新的活动是不利的,若 $z_j < v_j$,則有利。判断为有利时,根据(5.2)求出那一列,轉入单纯形法的步驟。

例4 在§1例1中,設追加产品C与D,其技术系数与利潤系数如表7.3所示(单位与表1.1相同)。

表 7.2 資源利用限度变化的例子

段	$v_j \rightarrow$ v_j 变数	0 s	7 x_1	12 x_2	0 λ_1	0 λ_2	0 λ_3	計
1	0 λ_1	84-3.12 θ	0	0	1	-8.12	1.16	83.04-3.12 θ
	7 x_1	20+0.40 θ	1	0	0	0.40	-0.20	21.20+0.40 θ
	12 x_2	24-0.12 θ	0	1	0	-0.12	0.16	25.04-0.12 θ
	$s_j - v_j$	428+1.36 θ	0	0	0	1.36	0.82	429.88+1.36 θ $0 \leq \theta \leq 26.92$
2	0 λ_2	-26.92308+ θ	0	0	-0.32051	1	-0.37180	-26.61538+ θ
	7 x_1	30.76923	1	0	0.12820	0	-0.05128	31.84615
	12 x_2	20.76923	0	1	-0.03846	0	0.11538	21.84615
	$s_j - v_j$	464.61539	0	0	0.43889	0	1.02565	466.07692 $26.92 \leq \theta$

表 7.3 新产品

产 品	C	D
煤 炭	3	12
电 力	6	3
劳 力	8	4
利 润	10	8

先对 C 是

$$z_j = 3 \times 0 + 6 \times 1.36 + 8 \times 0.52 = 12.32,$$

较 $v_j = 10$ 大, 所以若追加 C, 则每 1 公斤减少利润 2.32 万元。再对 D 是

$$z_j = 12 \times 0 + 3 \times 1.36 + 4 \times 0.52 = 6.16,$$

所以 $v_j = 8$ 大, 即若追加产品 D, 则每 1 公斤增加利润 1.84 万元。为此所作的修正只须对产品 D 的列以 $12Q_1 + 3Q_2 + 4Q_3$ 求出, 再进行单纯形

法的计算就行。结果是生产产品 A 15.38 公斤, B 20.77 公斤, D 11.54 公斤, 利润是 449.23 万元。

最后, 考虑新追加一个条件

$$a_{m+1,1}x_1 + \cdots + a_{m+1,n}x_n \leq s_{m+1} \quad (7.4)$$

的情况。若已有规划中的 $x_j (j=1, \dots, n)$ 满足 (7.4), 则没有问题。若不是这样, 就必须作新的表来修正规划。新的初始表是, 在已有的最优表中追加对应于条件 (7.4) 的松弛变数 $\lambda_{m+1} (=y_{n+m+1})$ 的列与 λ_{m+1} 的行。因为以 λ_{m+1} 作基底变数, 使 λ_{m+1} 的列为单位向量 (“1” 放进 λ_{m+1} 的行内) 即可。 λ_{m+1} 的行一般可由下式求出:

$$b_{n+m+1,j} = a_{m+1,j} - \sum_{i \in B} a_{m+1,i} b_{ij} \quad (j=0, \dots, m+n). \quad (7.5)$$

式中, 设 B 为已有最优表的基底变数号码的集合, $a_{m+1,i}$ 是对于 $1 \leq i \leq n$ 采用由 (7.4) 所给出的值, 对于 $n+1 \leq i \leq n+m$ 都是 0。 (7.5) 右边第 2 项可以与在表的左侧将 v_i 换写为 $a_{m+1,i}$, 再从 (3.4) 求 z_j 同样的方法来计算。这样得到的表是 D 型, 因此可用对偶法进行修正。

〔(7.5) 的根据〕 因为在新的初始表中, 基底变数 $y_i (i \in B)$ 与 $y_{n+m+1} (= \lambda_{m+1})$ 的列是单位向量, 所以对任意的列 (第 j 列) 有

$$[\text{第 } j \text{ 列}] = \sum_{i \in B} b_{ij} [\text{第 } i \text{ 列}] + b_{n+m+1,j} [\text{第 } n+m+1 \text{ 列}]$$

成立。这个关系,对于从現在的最优表推上去,直到在原来問題的初始表中追加有 λ_{m+1} 的行和列的表,也是应当成立的 (§5)。特别是若着眼于其中 λ_{m+1} 行的元素,則知

$$a_{m+1,j} = \sum_{i \in B} b_{ij} a_{m+1,i} + b_{n+m+1,j}$$

成立。就此对 $b_{n+m+1,j}$ 求解,則得(7.5)。

例5 对 §1 例1 的問題求出解答以后,假設这个月只准备有总额 150 万元的流动資金,而对于产品 A, B 各 1 公斤的生产分別需流动資金 5 万元, 3 万元。

新追加的条件可写作

$$5x_1 + 3x_2 \leq 150. \quad (7.6)$$

在表 2.1 的第 1 段与第 3 段追加对应于 (7.6) 的 λ_4 的行与列, 如表 7.4 的

表 7.4 追加条件的例子

			$v_j \rightarrow$		0	7	12	0	0	0	0
	a_{ij}	v_i	$j \rightarrow$ i 变数	s	0	1 x_1	2 x_2	3 λ_1	4 λ_2	5 λ_3	6 λ_4
a	0	0	3 λ_1	360	9	4	1	0	0	0	0
	0	0	4 λ_2	200	4	5	0	1	0	0	0
	0	0	5 λ_3	300	3	10	0	0	1	0	0
	0	0	6 λ_4	150	5	3	0	0	0	0	1
			$z_j - v_j$	0	-7	-12	0	0	0	0	0
b	0	0	3 λ_1	-84	0	0	1	-3.12	1.16		0
	5	7	1 x_1	20	1	0	0	0.40	-0.20		0
	9	12	2 x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16		0
	0	0	6 λ_4	-22	0	0	0	-1.64	0.52		1
			$z_j - v_j$	428	0	0	0	1.36	0.52		0
c	0	0	3 λ_1	125.84	0	0	1	0	0.1706	-1.9026	
	7	7	1 x_1	14.64	1	0	0	0	-0.0732	0.2439	
	12	12	2 x_2	25.61	0	1	0	0	0.1219	-0.0732	
	0	0	4 λ_2	13.41	0	0	0	1	-0.3171	-0.6098	
			$z_j - v_j$	409.76	0	0	0	0	0.9513	0.8293	

黑体字表示追加栏。

a, b (a 是为了說明所作的), b 是用 (7.5) 求出的。即是进行了如下的計算 (为了計算方便在左边記入 $a_{4i} (i \in B)$ 的值 0, 5, 3)。

$$b_{60} = 150 - \{0 \times (84) + 5 \times (20) + 3 \times (24)\} = -22,$$

$$b_{64} = 0 - \{0 \times (-3.12) + 5 \times (0.40) + 3 \times (-0.12)\} = -1.64,$$

$$b_{68} = 0 - \{0 \times (1.16) + 5 \times (-0.20) + 3 \times (0.16)\} = 0.52.$$

表 b 是 D 型。用对偶法将此修正則得新的最优表 c , 它表示 $x_1 = 14.64$ 公斤, $x_2 = 25.61$ 公斤的规划。利潤减少为 $f = 409.76$ 万元。流动資金的不足就招来大約 18 万元的損失。

在 §4 中, 說明了对于含有反方向的不等式的问题可用罰款改为标准型, 再用普通的单纯形法。为此, 对于反方向的不等式, 只导入表示使用过度的松弛变数 μ_i , 可以作出将全部松弛变数作为基底的表。这时的表, 因为在 s 的列内含有負数, 所以不是 S 型。若 $z_j - v_j (1 \leq j \leq n+m)$ 中没有負数, 則为 D 型, 因此可用对偶法处理。若不是那样, 暫且忽視不方便的活动而用对偶法, 或是暫且忽視不方便的條件而用普通的单纯形法, 先达到在这个限度的最优表, 以后, 再与本节中所述的方法一样, 考虑用与上面相反的手法繼續进行 (在这个情况下, 决定了樞軸件以后进行迭代的計算时, 对于“忽視”了的活动的列以及条件式的行最好也进行同样的計算)。

第3章 綫性规划的应用

有了在綫性不等式的約束下,使綫性函数最大或最小的綫性规划問題,就可以用单纯形法或对偶法求解。由于問題的性质,解有时也不存在。然而,为了知道解的存在不存在,这些解法也是有效的。因此,只要有充分的計算設備,主要的工作就是完善地进行問題的定式化,和同时利用問題的特征来考虑計算的簡單化,这两者有密切关系。因为若在問題的定式化上加費心思,則結果出来的系数有时可以成为非常特殊的。在这一章里,将对运输問題、博弈論、产业关連分析等简单地叙述其解法的技巧,以及在系数不十分确定时处理問題的方法。

§8 运输問題

运输問題有具有下列特征的条件。

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = t_j \quad (j=1, \dots, n), \quad (8.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i \quad (i=1, \dots, m), \quad (8.2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n), \quad (8.3)$$

$$\text{Min: } g(x_{ij}) = \sum c_{ij}x_{ij} \text{ 或 } \text{Max: } f(x_{ij}) = \sum v_{ij}x_{ij}, \quad (8.4)$$

式中 s_i, t_j, c_{ij} 为非負整数, $\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n t_j, v_{ij} = -c_{ij}$ 。

表 8.1 表示使生产工厂与銷售店之間的运输費用最小的例子。

就是說,給出从工厂 F_i 到銷售店 G_j 运输 1 单位产品的費用 c_{ij} , 例如 $F_1 \rightarrow G_2$ 是 16 元 (1 单位产品);并在表的边上設工厂 F_1

表 8.1 运输费用 $c_{ij}(-v_{ij})$

工 厂 \ 销售店	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	生产量 s_i
F_1	4	16	9	12	20	15
F_2	15	4	8	14	0	10
F_3	9	6	13	7	14	6
销售量 t_j	8	7	9	3	4	31

的生产量 $s_1=15$ 与销售店 G_2 的销售量 $t_2=7$ 等等。现在又设 $F_i \rightarrow G_j$ 的运输量为 x_{ij} , 则其运输费用为 $c_{ij}x_{ij}$, 总运输费用 $g(x_{ij}) = \sum c_{ij}x_{ij}$ 就是目标函数, 要使此最小。

写作通常的线性规划问题, 则如下:

$$Ax = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \quad (8.5)$$

$$x \geq 0, \quad (8.6)$$

$$\min: g(x) = cx. \quad (8.7)$$

式中

$$c = [4 \ 16 \ 9 \ 12 \ 20 \ 15 \ 4 \ 8 \ 14 \ 0 \ 9 \ 6 \ 13 \ 7 \ 14],$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & & & 1 & & & & & 1 & & & & & & \\ & 1 & & & 1 & & & & & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & 1 & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & 1 & & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A \text{ 中} \\ \text{空白} \\ \text{的地} \\ \text{方是} \\ 0. \end{matrix}$$

$$x = [x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{15} \ x_{21} \ x_{22} \ x_{23} \ x_{24} \ x_{25} \ x_{31} \ x_{32} \ x_{33} \ x_{34} \ x_{35}],$$

$$s = [15 \ 10 \ 6], \quad t = [8 \ 7 \ 9 \ 3 \ 4].$$

向量记号的使用对行与列不加区别。

从 A 中显著看到的特征, 是它的元素是 0 与 1, 就一个运输过程說, 1 有两次而其他的是 0. 加之, s, t 的系数也是整数值, 因此就有以下的性质: (1) 解一定存在, (2) 尽管条件是以等式給出的, 也很容易找出初始的并且非常有利的基解 (就是 §3 的基底解), (3) 基解是整数解, (4) 将任意的过程以属于基解的过程表示, 則只需 0, -1, 1 就可表示, (5) 因之可以利用单纯形法的簡便方法。

(8.1) 的 n 个式子 加在一起, 等于 (8.2) 的 m 个式子加在一起。即

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n t_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}. \quad (8.8)$$

(8.1) 与 (8.2) 的 $(m+n)$ 个式子当中給定 $(m+n-1)$ 个, 則剩下的一个可以从 (8.8) 中导出。所以独立的条件有 $(m+n-1)$ 个, 使用的过程数若比 $(m+n-1)$ 个小就会发生退化。

为了尽量得到有利的初始基解, 可以从运输費用是最小的地方——用起 (Houthakker 方法)。运输过程中正的元素有两个, 其他的是 0, 因此, 結合对应于正的元素的条件加以考虑, 而在滿足其中任何一个条件的水平上采用, 例如 $P_{25}=4$ (表 8.2a)。

表 8.2 初始基本解的求法

Figure 1 displays seven diagrams (a-g) illustrating the arrangement of numbers 1-8 in a 3x3 grid. Each diagram is associated with a value of 10 on both the left and right sides. The diagrams show the initial state (a, b, c) and the state after a 90-degree clockwise rotation (d, e, f, g).

- Diagram a:** Initial state. Numbers: 4 (top-right), 4 (bottom-right), 4 (bottom-left).
- Diagram b:** Initial state. Numbers: 6 (top-left), 4 (top-right), 4 (bottom-right).
- Diagram c:** Initial state. Numbers: 6 (top-left), 4 (top-right), 1 (bottom-left), 7 (bottom-left).
- Diagram d:** State after 90-degree clockwise rotation. Numbers: 8 (top-left), 6 (top-right), 4 (top-right), 1 (bottom-left), 8 (bottom-left), 7 (bottom-left), 4 (bottom-right).
- Diagram e:** State after 90-degree clockwise rotation. Numbers: 8 (top-left), 6 (top-right), 4 (top-right), 1 (bottom-left), 3 (bottom-left), 8 (bottom-left), 7 (bottom-left), 3 (bottom-right), 4 (bottom-right).
- Diagram f:** State after 90-degree clockwise rotation. Numbers: 8 (top-left), 7 (top-right), 6 (top-right), 4 (top-right), 1 (bottom-left), 3 (bottom-left), 8 (bottom-left), 7 (bottom-left), 3 (bottom-right), 4 (bottom-right).
- Diagram g:** State after 90-degree clockwise rotation. Numbers: 8 (top-left), 7 (top-right), 6 (top-right), 4 (top-right), 1 (bottom-left), 2 (bottom-left), 3 (bottom-left), 8 (bottom-left), 7 (bottom-left), 9 (bottom-right), 3 (bottom-right), 4 (bottom-right).

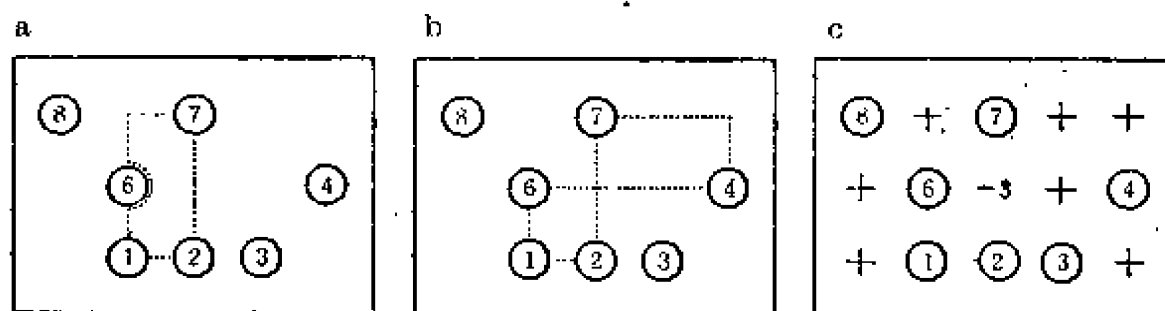
然后再在与滿足了的条件相对应的行或列除去后所剩下的运输費

用表中采用最有利的,这样反复进行,以达到表 g . 这就是初始基本解 $x = (8\ 0\ 7\ 0\ 0\ 6\ 0\ 0\ 4\ 0\ 1\ 2\ 3\ 0)$, 这时的运费是 $\sum c_{ij}x_{ij} = 172$.

其次,利用单纯形判别准则 $z_{ij} - v_{ij}$ 来看这个基本解是否最优。为此,先必须用已经使用的运输过程 ($P_{11}, P_{13}, P_{22}, P_{25}, P_{32}, P_{33}, P_{34}$) 表示尚未使用的运输过程,例如 P_{12} . 因为使用的过程数是 $(m+n-1) = (3+5-1) = 7$, 从而是非退化的情况,所以 P_{12} 可以唯一地表示如下:

$$P_{12} = P_{13} - P_{33} + P_{32} + 0 \times (P_{11} + P_{22} + P_{25} + P_{34}). \quad (8.9)$$

表 8.3 $z_{ij} - v_{ij} = z_{ij} + c_{ij}$ 的表



(8.9) 的关系,可以在表 8.3a 上利用对应于基本解的过程所构成的闭回路得到。(8.9) 右边的系数是 1, 0, -1, 乘以与此对应的 v_{ij} 而相加,则得 z_{12} 为

$$z_{12} = -9 + 13 - 6 = -2.$$

由于 P_{12} 采用了 1 单位,而进行相当于 (8.9) 右边的调整,从而减少了费用 2. 另一方面,由于 P_{12} 的采用而增加的费用是 $-v_{12} = 16$. 因此两者合计结果是

$$z_{12} - v_{12} = -2 + 16 = 14.$$

这表示由于 P_{12} 的采用,费用有所增加。再在 P_{15} 的情况,利用表 8.3b 求判别准则,即

$$z_{15} - v_{15} = 0 + 4 - 6 + 13 - 9 + 20 = 22$$

($c_{ij} = -v_{ij}$). 同样对所有尚未使用的过程求出其判别准则,然后

仅将其数不是+的填入表内,则得表 8.3c.

$F_2 \rightarrow G_3$ 的运输过程, P_{23} 的 $c_{23} - v_{23}$ 是 -3, 这表示费用减少, 因此下一个便采用它. 采用 P_{23} 1 单位就要减少 P_{22} 与 P_{33} 各 1 单位. 现有运输规划中 P_{22} , P_{33} 的使用水平是 $(x_{22}, x_{33}) = (6, 2)$, 以 1 除就得到用来发现要换掉的运输过程的 θ 的值, 因此, 去掉对应于其中较小值 2 的 P_{33} , 则 P_{23} 的采用水平决定为 2. 这时的运输规划由表 8.4 所给出. 同上一个运输规划不同的只是与 P_{23} 有关系的运输过程的水平.

表 8.4 最优运输规划

⑥	+	⑦	-	+
+	④	②	+	④
+	③	-	⑤	+

对于这个运输规划与以上同样, 求出其判别准则, 结果全部非负, 因此可知它是最优规划, 这时最小运输费用是 166.

这个问题有 7 个约束条件, 用通常的单纯形法从松弛向量或人造向量出发时, 就须大约 10 次左右才可以达到最优规划, 因而可知利用运输问题的特殊性的解法是非常强有力的.

与修订单纯形法对应的以下的方法, 将比从闭回路来评价单纯形判别准则 $z_{ij} - v_{ij}$ 要容易计算. 这在运输过程数增大时特别有效. 就是, 若决定了基本运输规划, 用对应于基本解的 c_{ij} 根据下式计算 u_i, v_j (v_{ij} 表示 $F_i \rightarrow G_j$ 的运输过程的利益).

$$c_{ij} - v_{ij} = u_i + v_j \quad (\text{对于基本解的 } (i, j)). \quad (8.10)$$

这样则任意的 z_{ij} 的评价式为

$$-z_{ij} = u_i + v_j. \quad (8.11)$$

因为 (8.10) 中方程的个数是 $(m+n-1)$, 所以在评价 $(m+n)$ 个的 u_i 与 v_j 时, 有必要先确定其中的任一个. 现命 $v_2 = 0$, 则在表 8.5c 中依 $u_2, v_5, v_2, u_3, v_4, v_3, u_1, v_1$ 的顺序决定. 用此在 c

表 8.5

a $-v_{ij}(c_{ij})$

4	16	9	12	20
15	4	8	14	0
0	0	13	7	14

b 基本运输规划 s_i

8	7				
	6		4		
	1	2	3		
t_j	8	7	9	3	4

c u_i, v_j

4	9				
	4		0		
	6	13	7		
v_j	6	4	11	5	0

d $z_{ij} - v_{ij}$

③	+	⑦	+	+
+	④	-3	+	④
+	①	②	③	+

e 最优规划

③	+	⑦	+	+	
+	④	②	+	④	
+	③	+	⑤	+	
v_j	3	4	8	5	0

u_i

1
0
2

表中计算出 $-z_{ij}$, 将它从 a 表的費用中減去, 則 $z_{ij} - v_{ij}$ 便从 d 表中求出。其对应于基本规划的值当然等于 0。为了計算方便, 那里将运输规划填进去。由于 $z_{23} - v_{23} = -3$, 便采取 P_{23} , 这与上面从閉回路考虑的同样, 决定采用水平为 2。将新的运输规划填进 e 表再求 u_i, v_j 計算 $z_{ij} - v_{ij}$, 則对于尚未采用的过程全部是正的, 可知其为最优规划。这一次把相当于 b, c, d 表的結合起来只用 e 表作完。

使 $u'_i = u_i + d$, $v'_j = v_j - d$, 則 $u'_i + v'_j = u_i + v_j$, 因此用 u'_i, v'_j 代替 u_i, v_j , 則评价不变。

再者, 將 s_i 的条件增加 1, 当使 $s'_i = s_i + 1$ 时, 为了保持 $\sum_i s_i = \sum_j t_j$, t_j 也增大 1, 而使 $t'_j = t_j + 1$, 此时費用的增加, 从表 8.5 c 的制作过程可知, 將由 $u_i + v_j$ 給出。

§9 有不确定需要的生产运输规划

需要量的预测往往是有困难的。因此可以設想对于一个銷售店也不能决定一个确定的数量, 而是有种种的数量。現設这些数量实现的概率为已知 [Ferguson & Dantzig, 17]。

設工厂 F_i 生产出来的 1 单位产品运输到銷售店 G_j 时的生

产·运输费如表 9.1. 这与 §8 的表 8.1 用相同的数值。生产量 s_i 也相同, 但是需要量却与其实现的概率一并给出。

表 9.1 生产·运输费 c_{ij}

工 厂 \ 銷售店	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	S_i
F_1	4	16	9	12	20	15
F_2	15	4	8	14	0	10
F_3	9	6	13	7	14	6
需要量 d_j^h	8 9 12	7 8 10	9 10	3 5 6	4 5	
需要实现的 概率 λ_j^h	0.2 0.6 0.2	0.1 0.7 0.2	0.2 0.8	0.1 0.7 0.2	0.1 0.9	

表中 d_j^h , λ_j^h 是銷售店 G_j 所考虑的第 h 个需要量与它的概率。

各銷售店的銷售价格 k_i , 为了简单起见都假设相等,

$$k_i = k = 50.$$

为了考察有这样不确定的需要时问题如何处理, 现在注目于銷售店 G_1 来看一看需要的性质。

先将运到 G_1 的产品, 根据銷售的概率分开来考虑。这样, $h=1, 2, 3$ 的三种的銷售量 t_1^h 为

$$t_1^1 = d_1^1 = 8,$$

$$t_1^2 = d_1^2 - d_1^1 = 1,$$

$$t_1^3 = d_1^3 - d_1^2 = 3.$$

t_1^h 的可能銷售的概率 μ_1^h 是

$$\mu_1^1 = \lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 = 0.2 + 0.6 + 0.2 = 1,$$

$$\mu_1^2 = \lambda_1^2 + \lambda_1^3 = 0.6 + 0.2 = 0.8,$$

$$\mu_1^3 = \lambda_1^3 = 0.2.$$

即得表 9.2.

为了简单起见, 又设运输的产品对銷售店供給过多时不能保存, 因而变为浪费。

表 9.2 銷售店 G_1 的需要与其概率

需要的种类 h	預測需要 d_1^h	預測需要的实 現 概 率 λ_j^h	預測需要的可能 銷售 概 率 μ_j^h	銷 售 量 x_j^h
1	8	0.2	1	8
2	9	0.6	0.8	1
3	12	0.2	0.2	3

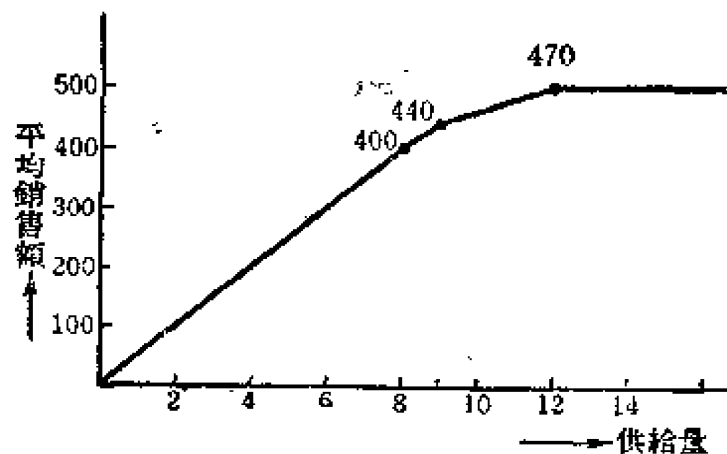
因此, 当供給了 9 单位, 而实现了的需要只有 8 单位时, 1 单位就被丢掉。并且一旦供給, 不論是銷售还是丢掉, 均設每单位的費用不变。

现在来看一看供給了 9 单位时的收益。到 8 单位为止, 可以以概率 1 銷售, 因此是 $8 \times 50 = 400$ 。第 9 单位的可能銷售概率是 0.8, 因此平均銷售額是 $0.8 \times 50 + 0.2 \times 0 = 40$ 。

再看一看供給了 11 单位时的平均銷售額。8 单位可以以概率 1 銷售, 因此是 $8 \times 50 = 400$ 。第 9 单位可以以概率 0.8 銷售, 因此是 $0.8 \times 50 = 40$ 。第 10, 11 的两个单位可以以概率 0.2 銷售, 因此平均銷售額是 $50 \times 0.2 \times 2 = 20$ 。

供給了 12 单位时, 最后的第 10, 11, 12 的三个单位的平均銷售是 $50 \times 0.2 \times 3 = 30$ 。如果再供給多了, 也不会增加銷售額。

从以上可知, 供給虽然增加, 但是平均銷售額并不成比例增大(图 9.1)。

图 9.1 銷售店 G_1 的供給与銷售額

[注] 若从表 9.1 計算 G_1 的平均需要, 再与前节中的需要作同样的处理, 而对問題定式化, 則平均需要量为 $8 \times 0.2 + 9 \times 0.6 + 12 \times 0.2 = 9.4$, 从而发生了不是整数值的情况, 虽然不会有这样的事。因此, 需要作另外的調整。

在这个问题上因为需要超过生产, 所以假设生产出来的货物全部运到销售店, 求使平均利润为最大的生产运输销售规划。 G_1 对各种运输量的平均销售额如表 9.3.

表 9.3 G_1 的平均销售价格

h	销售价格 k_1	销售实现的概率 μ_1^h	平均销售价格 $k_1 \mu_1^h$
1	50	1	50
2	50	0.8	40
3	50	0.2	10

对 G_1 的运输量 x_{ij}^h , 根据不同供给, 不同需要表示如表 9.4.

表 9.4

a G_1 的不同需要的运输规划				b 不同需要的平均价格			
销售店 工厂		G_1			G_1		
F_1		x_{11}^1	x_{11}^2	x_{11}^3	F_1		
F_2		x_{21}^1	x_{21}^2	x_{21}^3	F_2		
F_3		x_{31}^1	x_{31}^2	x_{31}^3	F_3		
销售量 i_1^h		i_1^1	i_1^2	i_1^3	50 40 10		

并且可以理解为有具有不同的平均价格的三种需要, 由表 9.4 b 给出。

再用表 9.1 求出不同需要的生产运输费, 则如表 9.5 a, 将此

表 9.5

a 生产运输费				b 平均利润表			
销售店 工厂		G_1			G_1		
F_1		4	4	4	F_1		
F_2		15	15	15	F_2		
F_3		9	9	9	F_3		
					需要 i_1^h		

×号 不使用的生产运输过程

从表 9.4 b 的平均价格减去, 则得不同需要的平均利润 (表 9.5 b).

G_1 的销售量 t_1^i 表示的是最大的销售量, 而不一定要全部满足, 因此条件不等式成为

$$x_{11}^1 + x_{21}^1 + x_{31}^1 \leq t_1^1, \quad (9.1a)$$

$$x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 \leq t_1^2, \quad (9.1b)$$

$$x_{11}^3 + x_{21}^3 + x_{31}^3 \leq t_1^3. \quad (9.1c)$$

$\sum_i x_{i1}^1$ 是确实可以销售的量, 因此在它达到限制量 t_1^1 以前, x_{i1}^2, x_{i1}^3 不容许取正的值。但是, 从平均利润表看, 从同一工厂 i 出厂的产品中, 销售概率大的一定对平均利润 v_i^1 有利, 因此, 这些先被挑选。所以, 即使不特别作为条件导入, (9.1a) 的等式不成立, 也不会采用 x_{i1}^2, x_{i1}^3 取正值的运输规划。从图 9.1 可知, 若对平均利润说收获递减时可用折线表示, 能用线性规划法求解就是为了这个原故。

再者, 要将 (9.1) 的不等式变为等式, 只需在左边加上 $x_{01}^i \geq 0$. 就运输问题言, 这可以设想为需要过多, 因此可以从假想的工厂 F_0 的供给满足这种需要。这样作使总需要与总供给相等, 变成与 § 8 的问题同样的形式。现将只对 G_1 的需要的条件加以整理, 得

$$\sum_i x_{i1}^1 + x_{01}^1 = t_1^1, \quad \sum_i x_{i1}^2 + x_{01}^2 = t_1^2, \quad \sum_i x_{i1}^3 + x_{01}^3 = t_1^3. \quad (9.2)$$

对于 x_{01}^i 的利润当然是 0, 因此含此在内的平均利润表如表 9.6.

表 9.6 G_1 的平均利润表

F_1	46	36	6
F_2	35	25	×
F_3	41	31	1
F_0	0	0	0

用以上对销售店 G_1 进行的方法对其他销售店也加以整理, 则成运输问题。

先作出不同需要的平均价格 $k_j \mu_j^i$ (表 9.7), 从此处再减去生

表9.7 不同需要的平均价格 $k_j\mu_j^h$

需要的种类 h \ 销售店	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
1	50	50	50	50	50
2	40	45	40	45	45
3	10	10	—	10	—

表9.8 平均利润 v_{ij}^h

工厂 \ 销售店 h	G_1			G_2			G_3			G_4			G_5		生产量 s_i
	1	2	3	1	2	3	1	2		1	2	3	1	2	
F_1	46	36	6	36	29	×	41	31		38	33	×	30	25	15
F_2	35	25	×	46	41	6	42	33		36	31	×	50	45	10
F_3	41	31	1	44	39	4	37	27		43	38	3	36	31	6
F_0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	12
需要量 t_j^h	8	1	3	7	1	2	9	1		3	2	1	4	1	43

产·运输费用, 求出平均利润(表9.8)。

再给出与此对应的需要 t_j^h 与生产量 s_i , 就完成问题的定式化。即

$$\sum_{i=0}^3 x_{ij}^h = t_j^h, \quad (9.3a)$$

$$\sum_{j=1}^5 \sum_{h=1}^{h_j} x_{ij}^h = s_i, \quad (9.3b)$$

$$x_{ij}^h \geq 0, \quad (9.3c)$$

$$\max: \sum_{i,j} \sum_h v_{ij}^h x_{ij}^h. \quad (9.3d)$$

式中 $i=0, \dots, 3$; $j=1, \dots, 5$; $h=1, \dots, h_j$; $s_0 = \sum_j \sum_h t_j^h - \sum_{i=1}^3 s_i = 12$.

表9.9中未作记的部分表示 $z-v$ 是正的值。初始基本运输规划是用 Houthakker 的规则求出, 最优解在三次后达到。这时的平均利润是 1142, 其中确定的部分是 1097, $F_2 \rightarrow G_5$ 运到的产品 1

单位的銷售虽是不确定,但有平均利潤 45.

表 9.9

a 初始基本运输规划

						u_i
	③		⑦		④	41
		⑥ 0	-1		-5	40
		① ①		⑤ ①		38
	① ③		② ①	① ①	①	0
v_j	5 0 0	6 1 0	0 0	5 0 0	10 0	

b 最优运输规划

						u_i
	③		⑦		④	41
		④	①		①	42
		⑤		③		40
	① ③	① ②	① ①	② ①		0
v_j	5 0 0	4 0 0	0 0	3 0 0	8 8	

§ 10 博弈論与綫性规划

现在来討論將矩陣博弈或有条件的矩陣博弈变换为綫性规划問題的求解。若將这个变换过的問題用单纯形求解,就可以确实并且有效地找出所有的基本最优策略(宮澤光一:对策的理論)。

現設博弈 (A, X, Y) 的局中人 I 所取策略 $x(m \times 1)$ 的集合 X , 与局中人 II 所取策略 $y(1 \times n)$ 的集合 Y , 都是非空的凸多面体, 对于由支付矩陣 $A(n \times m)$ 所給的 II 对 I 的支付額 yAx , 局中人 I 尽量使其大, 局中人 II 尽量使其小。

[注 1] A 的表示方法取与通常的支付矩陣为对称的形式, 并且 X, Y 不一定要有界。

凸多面体博弈 (A, X, Y) (文献[4]中 Wolfe 的論文)設为

$$X = \{x | Bx \leq b\}, \quad (10.1a)$$

$$Y = \{y | yC \geq c\}, \quad (10.1b)$$

式中 B 是 $k \times m$ 矩陣, C 是 $n \times l$ 矩陣, b, c 各是 $k \times 1, 1 \times l$, 矩陣博奕或有限制的矩陣博奕可以看作是条件 $Bx \leq b$ 与 $yC \geq c$ 具有特別的形式。因此, 先来看將凸多面体博奕变换为綫性规划的問題。

要使 yAx 小的局中人 II, 若知道 I 取 x , 将会在这个条件下使 yAx 小。即是

$$\min y(Ax); yC \geq c. \quad (10.2)$$

这是关于 y 的綫性规划問題。因为滿足条件的 y 是假定存在的, 所以有可行解存在。从而 $\min y(Ax)$ 是有限值或无限小。

現作(10.2)的对偶問題, 則为

$$\max cv; Cv = Ax, v \geq 0. \quad (10.3)$$

若 $\min y(Ax)$ 是有限值, 則由对偶定理, 得

$$\min y(Ax) = \max cv. \quad (10.4)$$

这是 I 取 x 时使 II 的支付額成为最小的值。因此, 从 I 的立場說, 是采用 x 时确实贏得的数額。这样作为 I 來說, 希望在 $Bx \leq b$ 的范圍内适当地选择 (10.3) 的 x , 从而尽量使 $\max cv$ 大。就是說, 將 v 同 x 都当作变数, 选择由

$$\max cv; Bx \leq b, Cv = Ax, v \geq 0 \quad (10.5)$$

决定的 x 。这时 I 从 II 确实贏得的数額就是 $\max cv$ 。

現作(10.5)的对偶問題, 則为

$$\min ub; yC \geq c, uB = yA, u \geq 0. \quad (10.6)$$

[注 2] (10.5) 的对偶問題的作法。

对(10.5)加以整理, 得

$$\max [c \ 0] \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, v \geq 0. \quad (10.7)$$

將上式条件全部換为不等式:

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & -A \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v \geq 0.$$

这里使 $x = x_1 - x_2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, 则

$$\max: [c \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} v \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & B & -B \\ C & -A & A \\ -C & A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v, x_1, x_2 \geq 0 \quad (10.8)$$

作对偶问题, 则得

$$\min [u \ y_1 \ y_2] \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} u \ y_1 \ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B & -B \\ C & -A & A \\ -C & A & -A \end{bmatrix} \geq [c \ 0 \ 0], \quad u, y_1, y_2 \geq 0. \quad (10.9)$$

将条件加以整理, 则得

$$[u \ y_1 \ y_2] \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & -A \\ -C & A \end{bmatrix} (\geq, =) [c \ 0], \quad u, y_1, y_2 \geq 0,$$

式中 $(\geq, =)$ 表示对于各自对应的项 \geq 与 $=$ 成立。

其次使 $y = y_1 - y_2$, 则 y 失去符号的限制。

$$\min ub; [u, y] \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & -A \end{bmatrix} (\geq, =) [c \ 0], \quad u \geq 0. \quad (10.10)$$

将上式分等式部分与不等式部分写, 则得 (10.6)。因此, (10.5) 与 (10.6) 为对偶关系。

然而, 既是作为决定局中人 I 的行动的线性规划问题导出了 (10.5), 根据同样的步骤也可求出 (10.6)。首先, 若知 II 选择 y , 则 I 在这个条件下使 yAx 大。

$$\max (yA)x; Bx \leq b. \quad (10.11)$$

作上式的对偶问题, 即为

$$\min ub; uB = yA, u \geq 0. \quad (10.12)$$

若 (10.11) 与 (10.12) 都有可行解, 则

$$\max (yA)x = \min ub. \quad (10.13)$$

作为 II 来说, 希望选择适当的 y 从而尽量使上式的值小。这在 (10.12) 就不是将 y 作为给定的值, 而是在 $yC \geq c$ 的范围内变动 y 求 $\min ub$ 。即是

$$\min ub; yC \geq c, uB = yA, u \geq 0, \quad (10.14)$$

上式不外乎是(10.6).

現在, (10.5) 的 $\max cv$ 是 I 若作的好就一定可以贏得的數額, (10.6) 的 $\min ub$ 是 II 若作的好就可以不必支付這以上的數額。但是因為 (10.5) 与 (10.6) 互為對偶問題, 當 (10.5) 与 (10.6) 都有可行解時, $\max cv$ 与 $\min ub$ 有共同的有限值, 這就是博奕的值。即得下述定理。

定理 10.1 當互為對偶問題的

$$\max cv; Bx \leq b, Cv = Ax, v \geq 0, \quad (a)$$

$$\min ub; yC \geq c, yB \leq yA, u \geq 0 \quad (b)$$

都有可行解時, 凸多面體博奕 (A, X, Y) , $X = \{x | Bx \leq b\}$, $Y = \{y | yC \geq c\}$ 有有限博奕的值,

$$\max cv = \min ub = w,$$

這時的 x, y 給出 I, II 的最優策略。

[注] 這兩個綫性規劃問題不一定都可能實行。Wolfe 考察了所有的情况。(a) 有可行解, 而 (b) 沒有時, 則博奕值為 $+\infty$ 。相反 (a) 無可行解, 而 (b) 有時, 則博奕值為 $-\infty$ 。再若 (a) (b) 都無可行解時, 則博奕無值。不論怎樣, 為了發現這些情况, 可將 (a) 或 (b) 用單純形法求解。

凸多面體博奕的條件 $Bx \leq b$ 与 $yC \geq c$ 取下式的特別值時, 可以看為有約束的矩陣博奕:

$$B = \begin{bmatrix} -I \\ \underline{1} \\ -\underline{1} \\ B_0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \underline{1} \\ -\underline{1} \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = [I\bar{1} - \bar{1}C_0], \quad c = [\underline{0}\underline{1} - \underline{1}c_0]. \quad (10.15)$$

式中 $\underline{1}, \bar{0}$ 是全由 1 或 0 所作的行向量, $\bar{1}, \bar{0}$ 是全由 1 或 0 所作的列向量。

$$X = \{x | x \geq 0, \sum x_i = 1, B_0 x \leq b_0\}, \quad (10.16a)$$

$$Y = \{y | y \geq 0, \sum y_j = 1, yC_0 \geq c_0\} \quad (10.16b)$$

就是 I 与 II 的策略集合。在凸多面體博奕中 x 与 y 不一定有概

率的性质,但有条件的博弈是具有概率性的混合策略。

将有约束的博弈改写为线性规划的问题,只须结合(10.15)应用定理 10.1. 只是有必要将 u 与 v 分割考虑,对于 I

$$\max [0 \ 1 - 1c] \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ v \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -I \\ \underline{1} \\ -\underline{1} \\ B_0 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \\ -1 \\ b_0 \end{bmatrix}, [I \bar{I} - \bar{I}C_0] \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ v \end{bmatrix} = Ax, \\ \tilde{v}, \mu_1, \mu_2, v \geq 0. \quad (10.17)$$

将上式加以整理,则

$$\max \mu_1 - \mu_2 + cv; x \geq 0, \sum x_i = 1, B_0 x \leq b_0,$$

$$\bar{I}(\mu_1 - \mu_2) + I\tilde{v} = Ax - C_0 v, \tilde{v}, \mu_1, \mu_2, v \geq 0, \quad (10.18)$$

\tilde{v} 是起松弛变数的作用。除去 \tilde{v} 便成不等式的条件,再命 $\mu = \mu_1 - \mu_2$, 则

$$\max (\mu + c_0 v); x \geq 0, \sum x_i = 1, B_0 x \leq b_0,$$

$$\bar{I}\mu \leq Ax - C_0 v, v \geq 0. \quad (10.19)$$

因为假定 $X = \{x | x \geq 0, \sum x_i = 1, B_0 x \leq b_0\}$ 不是空集,从其中决定 x , 再命 $v = 0$, 就可以找到满足 $\bar{I}\mu \leq Ax$ 的 μ 且使 μ 取非常小。所以,知(10.19)有可行解。

对于局中人 II 用定理 10.1 的 b, 则得

$$\min [\tilde{u} \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ u_0] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \\ -1 \\ b_0 \end{bmatrix}; y[I\bar{I} - \bar{I}C_0] \geq [0 \ 1 - 1c_0],$$

$$[\tilde{u} \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ u_0] \begin{bmatrix} -I \\ \underline{1} \\ -\underline{1} \\ B_0 \end{bmatrix} = Ax, \quad \tilde{u}, \lambda_1, \lambda_2, u_0 \geq 0. \quad (10.20)$$

消去 \tilde{u} , 命 $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, 则得

$$\begin{aligned} \min (\lambda + u_0 b_0); y \geq 0, \sum y_j = 1, y C_0 \geq c_0, \\ \lambda 1 \geq y A - u_0 B_0, u_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (10.21)$$

与 I 所作同样, 知 (10.21) 也有可行解。

定理 10.2 有条件的矩陣博奕 (A, X, Y) , $X = \{x | x \geq 0, \sum x_i = 1, B_0 x \leq b_0\}$, $Y = \{y | y \geq 0, \sum y_j = 1, y C_0 \geq c_0\}$ 具有 (X 与 Y 不是空集时) 有限的值, 等价于互为对偶的問題

$$\begin{aligned} \max (\mu + c_0 v_0); x \geq 0, \sum x_i = 1, B_0 x \leq b_0, \\ I \mu \leq A x - C_0 v_0, v_0 \geq 0, \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \min (\lambda + u_0 b_0); y \geq 0, \sum y_j = 1, y C_0 \geq c_0, \\ \lambda 1 \geq y A - u_0 B_0, u_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (b)$$

的有限的最优值

$$\max (\mu + c_0 v_0) = \min (\lambda + u_0 b_0) = w.$$

博奕的最优策略由这时的 x, y 給出。

例 設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = [1 \quad 2 \quad -1], b_0 = 0, C_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, c_0 = 0,$$

I 的最优解只需解以下的綫性规划問題:

$$\begin{aligned} \max \mu; x \geq 0, \sum x_i = 1, x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 0, \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu \leq \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} v_0, v_0 \geq 0. \end{aligned}$$

I 的最优策略是 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2}$, 博奕的值是 $w = \mu = \frac{3}{2}$. 若求解时用单纯形法, 則 II 的最优策略 y 可作为对偶問題的解同时求得。 $y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = 0, y_3 = \frac{3}{4}$ 或 $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 1$ 是 II 的基本最优策略。

在矩陣博奕 (A, X, Y) 中

$$X = \{x | x \geq 0, \sum x_i = 1\}, \quad (10.22a)$$

$$Y = \{y | y \geq 0, \sum y_j = 1\}, \quad (10.22b)$$

作为有限制的博弈的无限制的情况,就容易变换为对应的线性规划问题。即由定理 10.2 对于 I 作为

$$\max \mu; x \geq 0, \sum x_i = 1, I\mu \leq Ax \quad (10.23)$$

求出。取一个满足 $x \geq 0, \sum x_i = 1$ 的 x , 一定可以决定一个使 $I\mu \leq Ax$ 成立的 μ , 因此 (10.22) 的可行解必定存在。

同样对于 II, 有

$$\min \lambda; y \geq 0, \sum y_j = 1, \lambda 1 \geq yA, \quad (10.24)$$

对于上式必定有可行解。因此得以下的定理。

定理 10.3 矩阵博弈 (A, X, Y) , $X = \{x | x \geq 0, \sum x_i = 1\}$, $Y = \{y | y \geq 0, \sum y_j = 1\}$ 具有有限值, 等于互为对偶的问题

$$\max \mu; x \geq 0, \sum x_i = 1, I\mu \leq Ax, \quad (a)$$

$$\min \lambda; y \geq 0, \sum y_j = 1, \lambda 1 \geq yA \quad (b)$$

的最优值

$$\max \mu = \min \lambda = w.$$

博弈的最优策略由这对 x, y 给出。

例 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 I 的最优策略, 由下列的线性规划问题给出:

$$\max \mu; x \geq 0, \sum x_i = 1, I\mu \leq \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

对此求解, 得 $x_1 = 11/20, x_2 = 4/20, x_3 = 5/20$. 博弈的值是 $\max \mu = w = 37/20$. 对于 II 的 y , 利用单纯形表的对偶性, 可以同时计算得到, $y_1 = 8/20, y_2 = 7/20, y_3 = 5/20$.

将此结果同前面的结果比较, 知有限制的博弈的限制, 对 II 是有利的。

§ 11 利用最大最小原則的生产规划

在普通的生产规划中,問題是以

$$\max x \quad ax; \quad Bx \leq b, \quad x \geq 0 \quad (11.1)$$

的形式建立的。 B 表示技术系数, b 表示生产因素的限制, a 表示利潤。但 a 是反映市場状态的系数, 設較其他系数为不稳定。就是說, a 不确定取 $a^1, \dots, a^i, \dots, a^n$ 中的某一个。当在这样的時候就不能象 (11.1) 那样將問題定式化。

但即使 a^i 本身不确定, 如果給出它的概率 y_i , 利用 $\sum y_i a^i = a$ 的平均利潤系数, 可以作出与 (11.1) 同样形式的定式化, 但是概率 y_i 可以唯一預測的情况将是很少的。

为了將这样的問題定式化, 假設企业的經營者 I 采取尽量回避最坏的情况。那么制定 x 这样的生产规划后的最坏情况將以

$$\min y(Ax), \quad y \geq 0, \quad \sum y_i = 1, \quad y[\bar{1} - \bar{1}] \geq [1 - 1] \quad (11.2)$$

給出。式中 $A = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$ 。上式的值又可以由作为該問題的对偶問題考虑而求出。

$$\max \mu_1 - \mu_2; \quad [\bar{1} - \bar{1}] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \leq Ax, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad (11.3)$$

經營者 I 依照如何尽量使这个值大而行动。就是說, 根据

$$\max \mu; \quad \bar{1}\mu \leq Ax, \quad x \geq 0, \quad Bx \leq b \quad (11.4)$$

决定生产规划 x 。这可以看作經營者是根据平均利潤 $y(Ax)$ 的最大最小原則行动。

再者, 这个經營者 I 的行动原則, 可以认为是与由市場所扮演的局中人 II 进行下列的博奕:

$$X = \{x \mid Bx \leq b, \quad x \geq 0\}, \quad (11.5a)$$

$$Y = \{y | y \geq 0, \sum y_j = 1\}. \quad (11.5b)$$

例 設

$$\text{市場条件 } \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \ 7 \ 3) \\ (4 \ 1 \ 5) \end{bmatrix},$$

$$\text{技术系数 } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

則对于經營者的問題是

$$\max \mu; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu \leq \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad x \geq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

对此求解,得下列結果:

$$x_1 = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_3 = 0, \quad \mu = \frac{27}{5}.$$

为了比較,假設市場的状态很清楚,目标函数的系数确定为 $a^1 = (1 \ 7 \ 3)$, 則

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad \mu = 7,$$

再若确定 $a^2 = (4 \ 1 \ 5)$, 則

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \mu = 6.$$

这个生产规划的定式化有两点应该注意。第1是利用生产规划 x 形成多面体。在单纯使用矩陣博奕的情况,往往是不用混合策略就計算不出最优解;但是对于只限于一次的行动,使用混合策略,可以說,如果作为行动原則的說明,則說服力不强。在生产规划 x 中,不必要使用利用概率的混合策略。第2是承认市場的积极行动。反过來說,就是作为經營者相对地采取消极的行动。

再来看一看,因为經營者的过去經驗以致市場的行动受到限制的情况。这时的經營者与市場的博奕 (A, X, Y) 是

$$X = \{x | x \geq 0, Bx \leq b\} = \left\{x \mid \begin{bmatrix} -I \\ B \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \right\}, \quad (11.6a)$$

$$\begin{aligned} Y &= \{y | y \geq 0, \sum y_j = 1, yC \geq c\} \\ &= \{y | y[II - IC] \geq [0I - 1c]\}. \end{aligned} \quad (11.6b)$$

利用定理 10.1, 对于 I 只須解

$$\max [0 \ 1 \ -1 \ c] \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ v \end{bmatrix}; x \geq 0, Bx \leq b,$$

$$-Ax + [I \ \bar{1} \ -\bar{1} \ C] \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ v \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ v \end{bmatrix} \geq 0.$$

并且对于 II 只須解

$$\min [\tilde{u}u] \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}; y \geq 0, \sum y_i = 1, yC \geq c, [\tilde{u}u] \begin{bmatrix} -I \\ B \end{bmatrix} = yA, [\tilde{u}u] \geq 0.$$

§ 12 产业关联规划模型

一直到此, 約束向量和評價向量都是作为給定考虑的。当其中有不确定的因素时, 以适当的形式考虑平均需要 (§ 9) 或是放弃最大化的原則, 而采用最大最小的原則来处理。本节将对在約束向量和評價向量的不同情况下, 計算最优解, 并且确定条件与最优解之間的关系。因为根据条件参数使其連續地变化, 所以称为参数规划。这与条件的修正用同样的方法, 但是与特定条件的变化相比較, 它更強調在条件与最优解之間建立对应。

用简单的經濟计划模型来作为例子。至于选择什么样类型的經濟模型也有种种的見解, 而且即使有了决定, 約束向量和評價向量也很难唯一地确定。經濟计划的主体可以說是几个团体的集合, 因此目标函数的系数很少会从一开始就妥当地确定下来。再者, 約束向量虽是在为了应用綫性规划时而作为約束看待, 但是也有不少情况可以参考目标函数的水平而作一定程度的变动。这样, 作为参数规划, 对应种种的条件而各自作出暫时的最优规划, 然后将这些规划全都用数量加以表示, 至于再在其中决定那一个

表 12.1

a 技术系数 (A)				b 产业活动 ($I - A$)				c 逆矩阵 ($(I - A)^{-1}$)			
	I	II	III		x_1	x_2	x_3				
I	0.1	0.1	0.1	I	0.9	-0.1	-0.1	I	1.18	0.35	0.37
II	0.1	0.5	0.3	II	-0.1	0.5	-0.3	II	0.38	2.47	0.97
III	0.1	0.2	0.2	III	-0.1	-0.2	0.8	III	0.24	0.60	1.53

則有待于在更高水平上的綜合判断。在这里，綫性规划可以說是用来作为最后决定的准备。

現在先說明三种产业的 Leontieff 模型。第 1, 第 2, 第 3 三种产业大体上分別对应着农, 工和服务业的。技术系数在表 12.1a 中由 A 給出。例如为了 1 单位产品 I 就需要 0.1 的 I, 0.1 的 II, 0.1 的 III。考虑到每一产业的产品将为各种产业的产品所需要, $(I - A)$ 就是各种产业的活动。例如, 产出 1 单位的 I 就可在 I 产业中使用 0.1, 而将 0.9 調到其他的产业里去。与此同时却需要从 II, III 来投入 -0.1, -0.1。为了区别产出与投入, 在活动的系数上加以 + 与 - 的符号。在自己产业内未使用的部分中, 有的投入其他产业而为其产出起作用, 有的脫离开生产过程而到最終需要去。如此, 設各种产业的产出水平为 x , 最終需要为 F , 則

$$(I - A)x = F, \quad (12.1)$$

或对 x 求解, 則得

$$x = (I - A)^{-1}F. \quad (12.2)$$

現在对于各种产业的 1 单位产品所需要的資本量以向量 k 給出, 則对 x 的产出必要的資本量可由内积

$$kx = k(I - A)^{-1}F \quad (12.3)$$

表示。在这个模型中不許可有活动的选择, 問題只是根据最終需要如何决定它的水平。这是由 (12.2) 給出的。并且所关心的量,

例如投資量与最終需要的关系是由(12.3)給出。在各个情况中起重要作用的 $(I-A)^{-1}$, $k(I-A)^{-1}$ 分別称为逆矩陣表和准逆矩陣表,是表示最終需要与 x , kx 的关系的系数。

例 給出表 12.2, 則

$$x = (14.5 \ 47.0 \ 33.6), \quad kx = 31.1, \quad k(I-A)^{-1} = (0.44 \ 0.78 \ 1.22).$$

表 12.2 資本系数与最終需要

a				b			
	I	II	III		I	II	III
資本系数 k	0.2	0.1	0.7	k_1	0.3	0.1	0.3
最終需要 F	5	12	18	F_1	1	7	2

現在如果 F 的值增加几倍, 立即可以計算出資本的需要量。当发生 $F + \theta F_1$ 或 $k + \lambda k_1$ 这样的变化时, 也容易計算。

但在經濟計劃模型中, 活动是容許选择的, 并且是作为綫性规划問題而定式化的, 因此, 对于条件的变化有必要应用参数规划。

若在上述活动之外导入貿易的活动, 就給与选择的可能性(文献[16]中的 Chenery 論文及文献[15])。

就是, 从供給的方面看有国内生产与輸入, 在需要的方面有最終需要(除去輸出)与輸出。但是輸出总起来也可看作是产出外汇的产业。輸入是投入外汇, 进行各个的产出, 而 I, II, III 的产出并不需要外汇。即若用輸入价格 p_m 与輸出价格 p_e 作輸出入的活动, 則得 $\begin{bmatrix} -I & I \\ p_e & -p_m \end{bmatrix}$ 。例如輸出 1 单位的 I, 則增加 p_e 的外汇, 但是分配到最終需要的部分就相应的减少。現設国内生产水平为 x , 輸出水平为 e , 輸入水平为 m , 并且外汇至少要有 $b=1$ 单位的黑字作为条件, 則計劃模型如下:

$$\begin{bmatrix} (I-A)^{-1} - I & I \\ 0 & p_e & -p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} F \\ b \end{bmatrix}, \quad \min kx; \quad x, e, m \geq 0. \quad (12.4)$$

并且要使这时的必要投资量为最小。但在下表的数值例中不容许有产业 I 的输入,并且输出至少为 1 单位,即

$$e_1 \geq 1, m_1 = 0. \quad (12.5)$$

当然输出活动直接不需要投资。但是通过经济整体的机构对投资量起影响。并且 F, b, k 等的系数设为边际值。就是说,在这个模型中目的是投资的有效分配,由此而生变化的只设为与最终需要的增加等相应的部分,而避免急剧的经济构造的变化。

表 12.3 的结果是国内生产 $x = (15.82 \ 48.35 \ 34.07)$, 输出 $e = (1.00 \ 0.37 \ 0)$, 没有输入,这时的最小投资量是 31.85。现将对应 x_1, e_1, x_2, e_2, x_3 的活动总起来以 B 表示,则 B^{-1} 除最后 1 列外是非负的(这只需看表 12.3b 中对应松弛变数 y 的部分,但需要注意最初 y 的活动不形成正的单位矩阵这一点)。因此,若乘 B^{-1}

$$\text{以 } \begin{bmatrix} F \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0, \text{ 则必有 } B^{-1} \begin{bmatrix} F \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ 成立。}$$

就是可以说,不论怎样增大最终需要与外汇的限制,只进行 I, II, III 的国内生产与 I, II 的输出的产业的构造不变。这样,例如约束向量以 $\theta[1 \ 7 \ 2 \ 0 \ 0]$ 增加时,各个水平增加多少的问题只需计算

$$B^{-1}\theta \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta B^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

并且从 B^{-1} 的形式知不增加输出,只变动最终需要的水平(表 12.3 b; 12.4 a)。

最终需要作如下的分割,考虑各个不同的变化

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 16 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta_2.$$

表 12.3 原始数据与最终单纯形表

a.														
λ														
1			-0.3 -0.1 -0.3											
1			-0.2 -0.1 -0.7											
s	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	m_1	m_2	m_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
5	0.9	-0.1	-0.1	-1						-1				
12	-0.1	0.5	-0.3		-1		1				-1			
16	0.1	-0.2	0.8			-1			1			-1		
1				0.7	0.8	0.9	-1.4		-1.9				-1	
1				1										-1
b														
x_1	15.82	1					-0.26	-0.55		-1.18	-0.35	-0.23	-0.43	0.88
e_1	1.00		1				0.00	0.00		0	0	0	0	1.00
x_2	48.35						-1.85	-4.88		-0.38	-2.47	-0.97	-3.08	-1.78
e_2	0.27			1			-1.75	-2.38		0	0	0	-1.25	-0.88
x_3	34.07		1				-0.49	-0.04		-0.24	-0.66	-1.53	-0.82	-0.33
\bar{z}_0	-31.85	0	0	0	0	0.35	0.58	0.63		0.44	0.78	1.22	0.97	0.24
\bar{z}_s	-19.80					0.02	0.41	0.66		0.47	0.55	0.04	0.69	0.01
λ 的范围 (不使基本解起变化)				-15.8 \leq			-1.42 \leq -0.94 \leq			-0.96 \leq -1.42 \leq -1.91 \leq -1.42 \leq -16.18 \leq				

表 12.4
a 約束向量变化的部分計算

基本解不变化的范围				$B^{-1}f$		
θ_2	θ_1	θ	θ_3	θ_1	θ	
x_1	$-18.04 \leq$	$-3.80 \leq$	0.88	6.43	4.16	
c_1	$-1.00 \leq$	$\leq \infty$	1.00	0	0	
x_2	≤ 27.23	-2.47	-1.78	3.08	19.58	
c_3	≤ 0.43	$\leq \infty$	-0.88	1.25	0	
x_3	≤ 101	$-4.33 \leq$	-0.33	0.82	7.92	

b 整理結果

变 化	θ 的增加	θ_1 的增加	θ_2 的增加 ≤ 0.43	$0.43 \leq \theta_2 \leq 106.5$		$106.5 \leq \theta_2$
采用 x_1	$15.82 + 4.16\theta$	$15.82 + 0.43\theta_1$	$15.82 + 0.88\theta_2$	x_1	x_1	x_1
活动 c_1	1.00	1.00	$1.00 + \theta_2$	c_1	c_1	c_1
x_2	$48.35 + 19.58\theta$	$48.35 + 3.08\theta_1$	$48.35 - 1.78\theta_2$	x_2	x_2	x_2
与 c_2	0.37	$0.37 + 1.25\theta_1$	$0.37 - 0.88\theta_2$	m_3	m_3	m_3
水平 x_3	$34.07 + 7.92\theta$	$34.07 + 0.82\theta_1$	$34.07 - 0.33\theta_2$	x_3	x_3	$-106.5 + \theta_2$
投资量	$31.85 + 8.33\theta$	$21.85 + 0.97\theta_1$	$31.85 - 0.24\theta_2$	$31.75 - 0.01\theta_2$		31.12

下面看一看当约束向量发生变化时,发现基本活动产生交替点的方法。现设发生了 f 的变化,则由此所起的各个活动的采用水平的变化是 $B^{-1}f$ 。因此,即使由于 $\mu f, \mu \geq 0$ 的变化而不使产生基本活动的交替的条件是活动的采用水平不因 $\mu B^{-1}f$ 的变化而成为负的。这样的边际点是在采用水平的任何一个恰成为 0 时求出。若 $B^{-1}f$ 已计算出来,只对其中的负的除以对应的 $B^{-1}s$,以其绝对值的最小的为 μ ,则 μ 表示边际点,与此对应的活动在下

一阶段由基本解给出。就 $f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的例子说, $\mu = 0.43$ 时得到 e_2

(表 12.4)。其次,对 e_2 行用与对偶法相同的准则检查, μ 即使超出边际点,也会暂时还满足最优的条件。就是说,即使增加 μ , $z_j - v_j \geq 0$ 并不变化,而在 $B^{-1}(s + \mu f)$ 中,任何一个若少许成为负的,则利用对偶法立刻可以转移到最优的状态,为此,只须用 m_8 代替 e_2 。

[注] $f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时, $B^{-1}f$ 从表 12.3 立即查出,取负的与 $B^{-1}s$ 作比,则

对 x_2, e_2, x_3 得 $\frac{48.35}{-1.78}, \frac{0.37}{-0.88}, \frac{34.07}{-0.33}$, 绝对值最小的是 0.43, 对应于 e_2 。

其次,在 $0.43 \leq \theta_2 \leq 106.5$ 范围内的计算,是从表 12.3 将 e_2 取出而引进 m_8 的情况, $106.5 \leq \theta_2$ 时更以 y_5 代 x_3 , 由此作出对应的单纯形表(表 12.5)。对此与表 12.3 的情况同样计算参数的可能变化范围,则可作出表 12.4 的后一部分与表 12.6。

表 12.5 条件变化时的单纯形表

	v_j	λ	-0.3 -0.2	-0.1 -0.1	-0.3 -0.7												
	s	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	m_2	m_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5			
x_1	15.73	1						-0.14		-1.18	-0.35	-0.28	-0.15	1.08			
e_1	1.00				1	0	0	0		0	0	0	0	1			
x_2	47.58		1			-2.06	-0.51	1.75		-0.38	-2.47	-0.97	-0.51	0.02			
m_3	-0.16					-0.42	-0.47	0.74	1	0	0	0	0.53	0.37			
x_3	34.06			1		-0.02	-0.80	-0.47		-0.24	-0.66	-1.53	-0.80	-0.32			
s_j-v_j	λ					0.26	0.64	0.12		0.44	0.78	1.22	0.44	0.01			
						0.28	0.34	-0.08		0.47	0.55	0.64	0.34	-0.23			
x_1	130.57	1						-1.43		-2.00	-2.57	-5.43	-2.86				
e_1	107.50				1	-0.05	-2.51	-1.46		-0.76	-2.06	-4.78	-2.51				
x_2	50.13		1			-2.06	-0.57	1.71		-0.40	-2.51	-1.09	-0.57				
m_3	39.09					-0.44	-1.40	0.20	1	-0.28	-0.76	-1.76	-0.40				
y_5	106.50					0.05	2.51	1.46		0.76	2.06	4.78	2.51	1			
s_j-v_j	λ					0.26	0.63	0.11		0.44	0.77	1.19	0.63				
						0.29	0.91	0.26		0.64	1.02	1.74	0.91				
x_1	16.19	1						-2.01	-2.93	-1.18	-0.35	-0.28	-1.69				
e_1	1.42				1	1.14	1.29	-2.00	-2.71	0	0	0	-1.43				
x_2	47.59		1			-2.03	-0.48	1.70	-0.06	-0.38	-2.47	-0.97	-0.55				
y_5	8.58					-1.14	-1.29	2.00	2.71	0	0	0	1.43	1			
x_3	33.92			1		-0.38	-1.22	0.17	0.87	-0.24	-0.66	-1.53	-0.35				
s_j-v_j	λ					0.27	0.65	0.11	-0.02	0.44	0.78	1.22	0.63				
						0.02	0.04	0.38	0.62	0.47	0.55	0.64	0.66				

表 12.6 $\theta_2=9$ 时其他变化的影响

b

	約 束 向 量 的 变 化					評 价 向 量 的 变 化			
	$-2.44 \leq \theta$		$6.00 \leq \theta_1$		$-38.78 \leq \theta_1 \leq 6.00$	$-0.94 \leq \lambda \leq 0.03$		$0.03 \leq \lambda$	
	x_1	e_1	x_1	e_1	x_1	e_1	x_1	e_1	
采用活动与水平	$25.44+4.16\theta$	10.00	$23.71+0.43\theta_1$	10.00	$25.44+0.15\theta_1$		25.44	x_1	16.19
	47.80+19.58 θ		$32.37+3.08\theta_1$		$47.80+0.51\theta_1$		10.00	e_1	1.42
	3.16		$-7.50+1.25\theta_1$		$3.16-0.53\theta_1$		47.80	x_2	47.59
	31.18+7.92 θ		$31.06+0.82\theta_1$		$31.18+0.80\theta_1$		3.16	m_3	8.58
							31.18	x_3	33.92
	$31.70+8.33\theta$		$29.72+0.97\theta_1$		$31.70+0.64\theta_1$		$31.70+21.76\lambda$		$31.75+19.79\lambda$

同样操作对 $\theta_2=9$ 时 θ 与 θ_1 的变化加以整理, 则如表 12.6. 表中

$$\text{約束向量: } \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 16 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1$$

資本系数向量: $(0.2+0.3\lambda, 0.1+0.1\lambda, 0.7+0.3\lambda)$.

再来看一看评价向量的資本系数变化成为 $(0.2 \ 0.1 \ 0.7) + \lambda(0.3 \ 0.1 \ 0.3)$ 的情况。在最初的約束向量的状态中, 为了改变 λ , 先看评价向量 $(-0.3 \ -0.1 \ -0.3)$ 的 $z_j - v_j$, 则由表 12.3 b 知, 不在基本解内的活动都是正的。因此不管使 λ 取多大的正值, 直到現在是非負的 $z_j - v_j$ 也不会发生变化。就是說, 在这里考虑的模型中, 資本系数的增加不会带来輸入。若 λ 取負值, 資本系数减少时就作相反的考虑, 以 λ 行中的正的 $z_j - v_j$ 除原来的 $z_j - v_j$, 其中最小的表示边际点, 与此对应的活动在下一步换进来。就是若超过边际点 -0.94 , 則对应 m_3 的 $z_j - v_j$ 成为負的, 因而被采用, 这不外乎是单纯形法的应用。利用表 12.5 求出 $\theta_2=9$ 时评价向量的变化結果則如表 12.6 b, λ 大因而資本系数大时沒有輸入, λ 接近 0 时进行 m_3 的輸入。 λ 接近 0 时产业面的資本系数差大, 由于此事利用貿易節約資本是可能的。 λ 大則利用貿易的節約資本就不可能, 这可认为不过是为了确保外汇的条件进行輸出。这样就可以确立参数变化的所与条件与对应的最优解之間的关系。

后 記

前二章是由森口、后一章是由宮下写的。从决定合写到交稿，日期非常短，因此彼此几乎完全没有联系。在記号与其他地方有不統一处，希望原諒。

在第1章，力求自然地說明所謂单纯形法的原理。在第2章，闡述了稍为高級的处理方法。一个問題得到解以后的考察或研究是很重要的。这事虽然不限于綫性规划的問題，但是在綫性规划問題上特別有实用上的巨大意义。整个第1、2章的处理中不多使用矩陣計算。向量这一詞的意义，覺得象§5的补注那样說明就可以。然而因为有第3章以及与其他文献的联系，所以也不一定拘于这个解釋。

在第3章，象在这一章一开始所說的，考虑了問題的設定与它的解法。并且特別叙述了几个处理不确定因素的方法。在与基底解同样的意义上采取了基本解这一用語。这也就那样了。再就是，說到凸多面体对博奕的凸多面体也用作含有不是有界的情况。对于記号，在經濟学的习惯用法与綫性规划的习惯用法不同时，沒有一定使其一致。

森 口 繁 一

宮 下 藤 太 郎

1968 年 5 月 20 日

参 考 文 献

- [1] T. O. Koopmans (ed.): Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph No. 13 (Wiley, 1951), 404 pp.
- [2] R. Dorfman: Application of Linear Programming to the Theory of the Firm (University of California Press, 1951), 98 pp.; 小宮譯: リニア・プログラミング(日本規格協会, 1955), 225 pp.
- [3] A. Charnes, W. Cooper and A. Henderson: An Introduction to Linear Programming (Wiley, 1953), 74 pp.
- [4] H. W. Kuhn and A. W. Tucker (ed.): Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematics Studies No. 88 (Princeton University Press, 1956), 322 pp.
- [5] A. Orden and L. Goldstein (ed.): Symposium on Linear Inequalities and Programming, Project SCOOP. 1 April 1952 (Planning Research Division, Comptroller, Hdqs., U. S. Air Force).
- [6] Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, National Bureau of Standards (Jan. 1955), 685 pp.
- [7] 河部守弘: リニア・プログラミングによる 経営計画 (产业图书出版, 1956), 268 pp.
- [8] 加藤二郎, 菅波三郎: 実务家 のためのリニア・プログラミング (誠信书房, 1956), 120 pp.
- [9] 山田雄三, 久武雅夫編: 経済分析 シンポジウム 1, 経済活动分析 (日本評論新社, 1957), 126 pp.
- [10] 森口繁一: 線型計画法入門 (日本科学技术連盟, 1957), 161 pp.
- [11] 石田武雄, 前田活郎: わさしいリニア・プログラミング (ダイヤモンド社, 1958), 199 pp.
- [12] 横山保: 企业经营と線型計画 (大阪大学経済学部 社会経済研究室, 1957), 136 pp.
- [13] A. S. Manne: Scheduling of Petroleum Refinery Operation (Harvard University Press, 1956), 185 pp.
- [14] 稲田献一: リニア・プログラミングの理論と応用 (ダイヤモンド社, 1957).
- [15] 古谷弘: 現代経済学 (弘文堂, 1957), 247 pp.
- [16] T. Barna (ed.): The Structural Interdependence of the Economy

(Wiley, 1954), 429 pp.

- [17] A. R. Ferguson and G. B. Dantzig: The Allocation of Aircraft to Routes—An Example of Linear Programming under Uncertain Demand, *Management Science*, 3, No. 1, 1956 Oct, 45~73.

校 后 記

許 國 志

这本小册子确实在短短五、六万字中,引进了不少的材料。但亦由于篇幅的限制,因此有些証明就不得不省略,而仅仅利用数值例来加以說明。

书中第1章、第2章以及第3章中的部分內容(§8 运输問題)都是典型的綫性规划的內容。第3章与其說是应用(原书标题如此),无宁說是綫性规划的重要組成部分。其中有些問題的討論还是較有兴趣的,例如§11 利用最大最小原則的生产规划。§10 博奕論与綫性规划一节,也較一般綫性规划书中引进了較新穎的材料。

綫性规划中的一个中心內容就是对偶理論。本书由于篇幅关系,不能詳加討論,这是可以理解的。但是如果在适当的地方加以解釋,将会是有益的。

这本小册子可以作为初学綫性规划的人們的补充、复习讀物。一般讀者也可以从中了解到一些綫性规划的內容。有兴趣的讀者可參讀下列著作:

1. 中国科学院数学研究所运筹学研究室編:綫性规划的理論及应用,人民教育出版社(1959)。

2. Л. В. 康特洛維奇: 生产組織与計劃中的数学方法,中国科学院力学研究所运筹学室譯,科学出版社(1959)。

3. S. 梵达: 博奕論与綫性规划,南开大学数学系綫性规划小組譯,人民教育出版社(1960)。